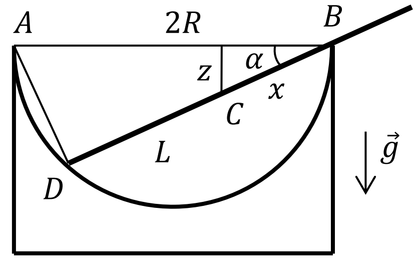
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ПРОЛЕТНО НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
15 МАРТ 2025 г., ЛОВЕЧ
Решения на Специалната тема (седма състезателна група)

Задача 1. Чаша със сламка



а) Нека точка C е центърът на масата на сламката. Той се намира на разстояние z под повърхността на чашата. Разстоянието от C до ръба B на чашата е x. Сламката ще е в равновесие, когато $\frac{dz}{d\alpha} = 0$. **[0.2 т.]** $z = x \sin\alpha$. **[0.2 т.]** Тъй като ъгълът ADB е прав, $L + x = 2R\cos\alpha$, **[0.3 т.]** (1) откъдето $z = (2R\cos\alpha - L)\sin\alpha$ или $z = R\sin 2\alpha - L\sin\alpha$. **[0.3 т.]** Намираме $\frac{dz}{d\alpha} = 2R\cos 2\alpha - L\cos\alpha$. **[0.5 т.]** (2) Използвайки, че $\cos 2\alpha = -1 + 2\cos^2\alpha$, то (2) се преобразува до $\frac{dz}{d\alpha} = -2R + 4R\cos^2\alpha - L\cos\alpha$. (3) Нулирайки функцията (3), получаваме квадратното уравнение $4R\cos^2\alpha - L\cos\alpha - 2R = 0$ **[0.5 т.]** с решения $\cos\alpha_{1,2} = \frac{L \pm \sqrt{L^2 + 32R^2}}{8R}$. Тъй като $\cos\alpha > 0$, то има само едно решение $\cos\alpha = \frac{L + \sqrt{L^2 + 32R^2}}{8R} = \frac{L}{R}\frac{\left(1 + \sqrt{1 + 32\left(\frac{R}{L}\right)^2}\right)}{8}$. (4) **[0.5 т.]**

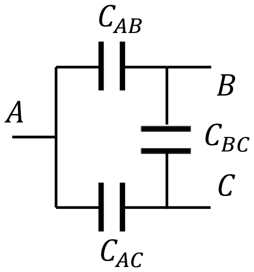
б) Първо може да забележим, че ако $\frac{L}{R} > 2$, центърът на масата C на сламката ще бъде извън чашата и тя ще падне. Така че $\frac{L}{R} \le 2$. **[0.5 т.]** За да е възможно това равновесие, сламката трябва да стърчи от ръба на чашата, т.е. $x < L$. **[0.5 т.]** Използвайки (1), $x = 2R\cos\alpha - L < L$, откъдето $\cos\alpha < \frac{L}{R}$. **[0.5 т.]** Замествайки с (4), $\frac{L}{R}\frac{\left(1 + \sqrt{1 + 32\left(\frac{R}{L}\right)^2}\right)}{8} < \frac{L}{R}$. (5) След опростяване на (5) $\frac{L}{R} > \sqrt{\frac{2}{3}}$. **[0.5 т.]** Така $\frac{L}{R} \in \left[\sqrt{\frac{2}{3}}, 2\right]$. **[0.5 т.]**

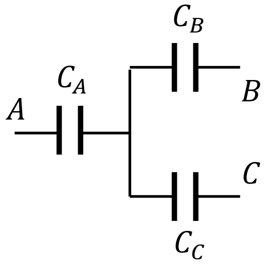
в) Може да се провери, че функцията (4) е монотонно растяща. **[0.3 т.]** Тогава, когато $\frac{L}{R} \to 2$, $\cos\alpha \to 1$ и $\alpha \to 0°$. **[0.4 т.]** Когато $\frac{L}{R} \to \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\cos\alpha \to \sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\alpha \to\approx 35.3°$. **[0.4 т.]** Така $\alpha \in [0°, 35.3°]$. **[0.4 т.]**

г) Когато $\frac{L}{R} < 1$ и сламката е хоризонтална, тя се намира на дълбочина $h = \sqrt{R^2 - L^2}$ **[0.2 т.]** под повърхността на чашата. Ако се наклони на ъгъл α, нейният център на масата ще се повдигне на височина $z = h - h\cos\alpha$. **[0.3 т.]** При малки трептения, т.е. при малки ъгли α, $z \approx \frac{h}{2}\alpha^2$ и потенциалната енергия на сламката (при нулево ниво в равновесие) е $E_{\text{пот}} = \frac{1}{2}mg\sqrt{R^2 - L^2}\alpha^2$. **[0.5 т.]** При трептене сламката ще има и кинетична енергия на постъпателното движение на центъра на масата и на въртеливото движение на пръчката. Първата е $E_{\text{кин,пост}} = \frac{1}{2}mv^2$, където $v = \omega h = \dot{\alpha}\sqrt{R^2 - L^2}$, т.е. $E_{\text{кин,пост}} = \frac{1}{2}m(R^2 - L^2)\dot{\alpha}^2$. **[0.5 т.]** Втората е $E_{\text{кин,върт}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}m(2L)^2\right)\dot{\alpha}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}mL^2\dot{\alpha}^2$. **[0.5 т.]** Пълната енергия на сламката е $E_{\text{пъл}} = \frac{1}{2}mg\sqrt{R^2 - L^2}\alpha^2 + \frac{1}{2}m\left(R^2 - \frac{2}{3}L^2\right)\dot{\alpha}^2$. **[0.5 т.]** Тогава периодът на трептене ще бъде $T = 2\pi\sqrt{\frac{m\left(R^2 - \frac{2}{3}L^2\right)}{mg\sqrt{R^2 - L^2}}} =$

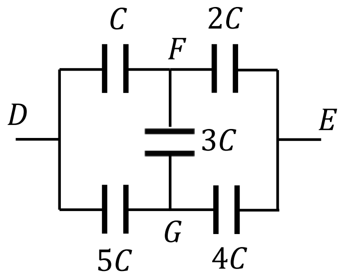
$2\pi\sqrt{\frac{R\left(1-\frac{2}{3}\left(\frac{L}{R}\right)^2\right)}{g\sqrt{1-\left(\frac{L}{R}\right)^2}}}$. **[0.5 т.]** При $\frac{L}{R} \to 1, T \to \infty$, **[0.2 т.]** а при $\frac{L}{R} \to 0, T \to 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$ (математично махало). **[0.3 т.]**

<u>Задача 2.</u> Кондензатори

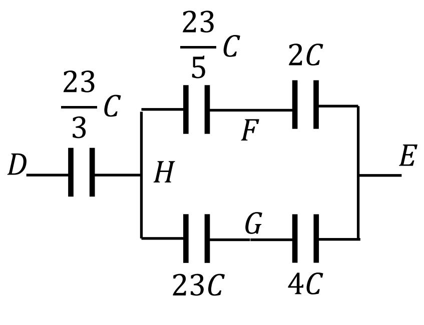


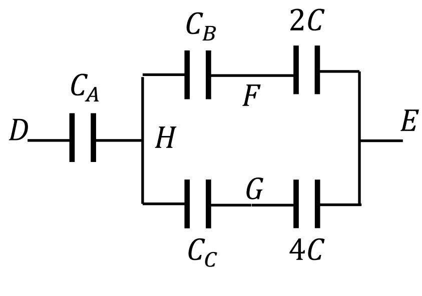


а) Приравнявайки еквивалентния капацитет между точките A и B за двете схеми, $\frac{C_A C_B}{C_A+C_B} = C_{AB} + \frac{C_{AC}C_{BC}}{C_{AC}+C_{BC}}$. **[0.5 т.]** След преобразования се получава $\frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_B} = \frac{C_{AC}+C_{BC}}{C_{AB}C_{AC}+C_{AB}C_{BC}+C_{AC}C_{BC}}$. **[0.5 т.]** (1) По същия начин за точките B и C се получава $\frac{1}{C_B} + \frac{1}{C_C} = \frac{C_{AB}+C_{AC}}{C_{AB}C_{AC}+C_{AB}C_{BC}+C_{AC}C_{BC}}$, **[0.5 т.]** (2) и за точките A и C $\frac{1}{C_A} + \frac{1}{C_C} = \frac{C_{AB}+C_{BC}}{C_{AB}C_{AC}+C_{AB}C_{BC}+C_{AC}C_{BC}}$. **[0.5 т.]** (3) Изваждайки (2) от (1), $\frac{1}{C_A} - \frac{1}{C_C} = \frac{C_{BC}-C_{AB}}{C_{AB}C_{AC}+C_{AB}C_{BC}+C_{AC}C_{BC}}$. **[0.5 т.]** (4) Събирайки (3) и (4), $\frac{2}{C_A} = \frac{2C_{BC}}{C_{AB}C_{AC}+C_{AB}C_{BC}+C_{AC}C_{BC}}$, откъдето $C_A = \frac{C_{AB}C_{AC}+C_{AB}C_{BC}+C_{AC}C_{BC}}{C_{BC}}$ **[0.5 т.]** (5). Аналогично $C_B = \frac{C_{AB}C_{AC}+C_{AB}C_{BC}+C_{AC}C_{BC}}{C_{AC}}$ **[0.5 т.]** (6) и $C_C = \frac{C_{AB}C_{AC}+C_{AB}C_{BC}+C_{AC}C_{BC}}{C_{AB}}$. **[0.5 т.]** (7)



б) Използвайки вече получените формули за преобразованието „триъгълник-звезда“, дадената схема с 5 кондензатора може да се преобразува до дадената по-долу (също с 5 кондензатора). **[0.5 т.]** Използвайки формули (5), (6) и (7), изчисляваме $C_A = \frac{C.5C+C.3C+5C.3C}{3C} = \frac{23}{3}C$, **[0.5 т.]** $C_B = \frac{C.5C+C.3C+5C.3C}{5C} = \frac{23}{5}C$ **[0.5 т.]** и $C_C = \frac{C.5C+C.3C+5C.3C}{C} = 23C$. **[0.5 т.]** Със заместените стойности схемата изглежда така: **[1 т.]**





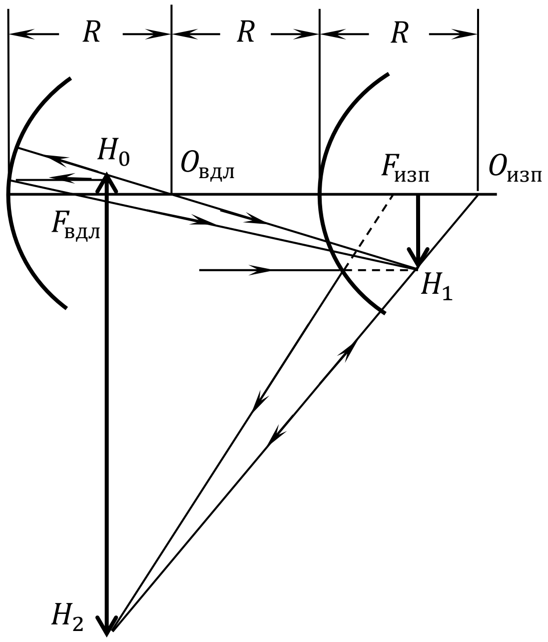
Изчисляваме капацитета $C_{HFE} = \frac{\frac{23}{5}C.2C}{\frac{23}{5}C+2C} = \frac{46}{33}C$. **[0.5 т.]** Аналогично $C_{HGE} = \frac{23C.4C}{23C+4C} = \frac{92}{27}C$. **[0.5 т.]** Общият капацитет $C_{HE} = \frac{46}{33}C + \frac{92}{27}C = \frac{4278}{33.27}C = \frac{1426}{11.27}C$. **[1 т.]** Капацитетът на цялата схема е $C_{DE} = \frac{\frac{23}{3}C.\frac{1426}{11.27}C}{\frac{23}{3}C+\frac{1426}{11.27}C} = \frac{23.1426}{11109}C = \frac{23.1426}{3.3703}C = \frac{1426}{3.161}C = \frac{62}{3.7}C = \frac{62}{21}C$. **[1 т.]**

<u>Задача 3.</u> Огледала (две независими подзадачи)

Първа подзадача

а) Образът на действителен източник, получен от изпъкнало огледало, е винаги зад огледалото и е недействителен. За да се получи ситуацията в тази задача (образ пред изпъкналото огледало), използвайки обратимостта на лъчите, източникът трябва да е зад вдлъбнатото огледало. Но този източник е образ, получен след отражение от вдлъбнатото огледало. Това е възможно, само ако източникът на светлина се намира между фокуса и центъра на вдлъбнатото огледало. **[0.3 т.]** Записваме формулата на огледалото за вдлъбнатото огледало: $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{R}$. (1) **[0.2 т.]** Използвайки разсъжденията от по-горе (за да съобразим знаците), записваме формулата на огледалото за изпъкналото огледало: $\frac{1}{2R-s'}+\frac{1}{2R-s}=-\frac{2}{R}$. (2) **[0.5 т.]** Изразяваме s' от (1), $s'=\frac{Rs}{2s-R}$. (3) Преобразуваме (2) до $2R-s'=-\frac{R(2R-s)}{5R-2s}$. (4) Заместваме (3) в (4), $2R-\frac{Rs}{2s-R}=-\frac{R(2R-s)}{5R-2s}$. (5) **[0.5 т.]** След опростяване се стига до квадратното уравнение $2s^2-6Rs+3R^2=0$. **[0.5 т.]** То има решения $s_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}R$. Тъй като $\frac{3+\sqrt{3}}{2}R>2R$ (невъзможно разстояние), то остава $s=\frac{3-\sqrt{3}}{2}R\approx 0.634\,R$. (6) **[1 т.]**

б) Отношението k на големините на образа и източника може да се представи така: $k=\frac{H_2}{H_0}=\frac{H_2}{H_1}\frac{H_1}{H_0}$. **[0.2 т.]** От чертежа следва, че $\frac{H_1}{H_0}=\frac{s'-R}{R-s}$, **[0.4 т.]** (7) а $\frac{H_2}{H_1}=\frac{3R-s}{3R-s'}$. **[0.4 т.]** (8) От (3) и (6) се получава, че $s'=\frac{3+\sqrt{3}}{2}R$. **[0.5 т.]** (9) Заместваайки в (7) и (8), $\frac{H_1}{H_0}=\frac{H_2}{H_1}=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$. **[0.5 т.]** Така $k=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\right)^2=7+4\sqrt{3}\approx 13.93$. **[1 т.]**



Втора подзадача

в) Записваме формулата на огледалото за вдлъбнатото огледало (всички разстояния оттук нататък са в cm): $\frac{1}{28}+\frac{1}{s'}=\frac{2}{40}$, **[0.5 т.]** откъдето $s'=70$ cm. **[0.5 т.]** Образът е реален, обърнат и с големина $h'=\frac{70-40}{40-28}2$ cm = 5 cm. **[0.5 т.]** Този образ е източник за изпъкналото огледало. Прилагайки същата формула $\frac{1}{-70+40}+\frac{1}{s''}=\frac{2}{-40}$, **[0.5 т.]** откъдето $s''=-60$ cm. **[0.5 т.]** Вторият образ е зад изпъкналото огледало, обърнат на втория, но прав на първия. Неговата големина е $h''=\frac{60-40}{40-30}h'=10$ cm. **[0.5 т.]** Окончателно образът е недействителен, прав и уголемен и се намира на 60 cm зад изпъкналото огледало. **[1 т.]**