МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ПРОЛЕТНО НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
14–16 март 2025 г. – гр. Ловеч
Тема за XI клас (пета състезателна група)
Примерни решения и указания

Решение 1.1. Около катода се формира облак от електрони, затова трябва да вържем положителният полюс на източника към анода, а отрицателния полюс към катода. Така между двата електрода ще протича ток. **(1 т.)**

Решение 1.2. Прилагаме напрежение U между катода и анода, както е описано в предното подусловие. В предложения модел може да разгледаме диода като плосък кондензатор с капацитет $C = \varepsilon_0 S/d$ **(0.5 т.)** Заряда на плочите на кондензатора ще е $Q = CU = \varepsilon_0 SU/d$, а този в обема между плочите ще е $q = aQ = a\varepsilon_0 SU/d$. **(1 т.)** Концентрацията на зарядите в този обем ще е $n_V = q/(Sd) = a\varepsilon_0 U/d^2$ **(0.5 т.)**, а плътността на тока $j = n_V\bar{v}$ **(1 т.)**, където $\bar{v}$ е средната скорост на електроните в обема между електродите. Като оценка на средната скорост може да използваме, че първоначално те се движат много бавно, а при подаване на напрежение започват да се ускоряват от електричното поле и достигат максимална скорост $v_{\max}$, която може да се определи от закона за запазване на енергията: $mv_{\max}^2/2 = eU$, $v_{\max} = \sqrt{2eU/m}$. **(1 т.)** Като използваме, че ускорението на електроните е постоянно, средната скорост ще е средноаритметичното на минималната и максималната скорости или $\bar{v} = (v_{\max} + 0)/2 = v_{\max}/2 = \sqrt{eU/(2m)}$. **(0.5 т.)** Така за плътността на тока получаваме $j = a\varepsilon_0 U\sqrt{eU/(2m)}/d^2$, а за зависимостта на тока от напрежението получаваме $I = jS = a\varepsilon_0 SU\sqrt{eU/(2m)}/d^2 = cU^n$, откъдето следва, че $c = a\varepsilon_0 S\sqrt{e/(2m)}/d^2$, а $n = 3/2$. **(1 т.)**

Решение 1.3. Нека за време Δt до анода достигат $N = n_V\Delta V/e = n_V\bar{v}\Delta tS/e = j\Delta tS/e = I\Delta t/e$ **(1 т.)** на брой електрона със скорост $\bar{v}$, които му предават импулс $\Delta p = Nm\Delta v$, където $\Delta v = |0-\bar{v}| = \bar{v}$ **(1 т.)** е изменението на скоростта на електроните в следствие на удара. Резултантната сила, действаща на анода ще е $F = \Delta p/\Delta t = Nm\bar{v} = Im\bar{v}/e = cU^{3/2}m\sqrt{eU/(2m)}/e \propto U^2$. **(1 т.)** Ако увеличим напрежението U, три пъти, силата действаща на анода ще се увеличи $3^2 = 9$ пъти. **(0.5 т.)**

Решение 2. За да определим минималната начална скорост и посоката ѝ така, че кучето да не се намокри при скока, първо трябва да знаем докъде стига водата от пръскалката. Водата излиза от отвора във всички посоки със скорост v. Ние ще разглеждаме само равнината, в която се движи кучето (една от всички вертикални равнини, минаващи през вертикала, прекарана през пръскалката). Нека разгледаме капка вода, която тръгва със скорост v под ъгъл θ. Траекторията на тази капка ще е парабола. Обвивката на всички възможни параболи за $\theta \in [0,\pi]$ ще ни показва докъде стига водата и какво трябва да прескочи кучето.

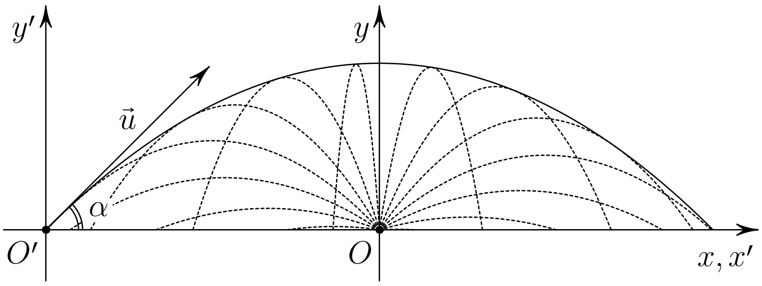
Въвеждаме координатна система с начало в пръскалката и ос y вертикално нагоре. Записваме законите за движение на капката в тази система: $x(t) = vt\cos\theta$ и $y(t) = vt\sin\theta - gt^2/2$. **(1 т.)** Изразяваме времето t от първото уравнение и го заместваме във второто, за да получим уравнението на траекторията на капката: $y = x\tan\theta - gx^2/(2v^2\cos^2\theta)$.**(1 т.)** Заместваме $\cos^2\theta = 1/(1+\tan^2\theta)$ и получаваме: $y = x\tan\theta - gx^2(1+\tan^2\theta)/2v^2$. Това е квадратно уравнение по отношение на $\tan\theta$:

$$\frac{gx^2}{2v^2}\tan^2\theta - x\tan\theta + \left(\frac{gx^2}{2v^2} + y\right) = 0.\textbf{(1 т.)}$$

Ако за точка с координати (x,y) това квадратно уравнение има само едно решение това значи, че до тази точка може да стигне само една парабола и точката трябва да е от обвивката на всички възможни параболи. За да има едно решение, дискриминантата му трябва да е равна на нула: $x^2 - 4\left[gx^2/2v^2\right]\left[gx^2/(2v^2) + y\right] = 0$, **(1 т.)** откъдето може да изразим уравнението, описващо обвивката:

$$y = \frac{v^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v^2}.\textbf{(1 т.)}$$

Както се вижда, това също е уравнение на парабола. Това ще рече, че ако кучето следва тази парабола няма да се намокри. **(1 т.)** За да намерим началната скорост, с която трябва да скочи кучето ще е по-лесно ако направим разглежданията в друга координатна система с начало в точка $O' = (-v^2/g, 0)$, която съвпада с началото на обвивката.



Връзката между компонентите в двете координатни системи е $x' = x + \frac{v^2}{g}$ и $y' = y$. **(1 т.)** Уравнението на обвивката в новата координатна система е:

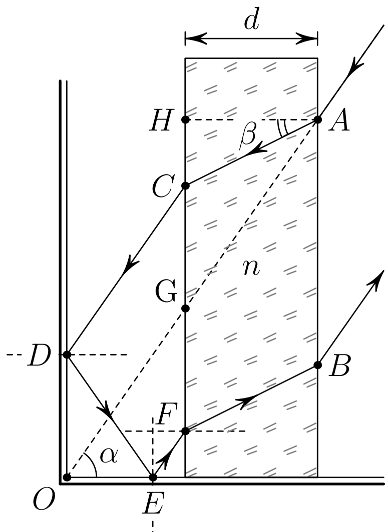
$$y' = \frac{v^2}{2g} - \frac{g}{2v^2}\left(x' - \frac{v^2}{g}\right)^2 = x' - \frac{g}{2v^2}x'^2. \textbf{(1 т.)}$$

Траекторията на кучето в тази координата система е:

$$y' = x' \tan\alpha - \frac{gx'^2}{2u^2\cos^2\alpha}.$$

Ако сравним последните две уравнения, те ще съвпадат ако коефициентите пред съответстващите степени на x' са равни или $\tan\alpha = 1, \alpha = 45°$ **(1 т.)** и $\frac{g}{2u^2\cos^2\alpha} = \frac{g}{2v^2}$, откъдето получаваме и началната скорост $u = v\sqrt{2}$. **(1 т.)**

Решение 3.1. Ходът на лъчите е показан на фигурата вдясно. След пречупване в т. A, лъчът се доближава към нормалата AH, защото $n > 1$ и излиза от пластината в т. C. В т. D се отразява от вертикалното огледало, като ъгъла на падане е равен на ъгъла на отражение, т. е. $\measuredangle CDE = 2\alpha$ ($CD \parallel AO$). В т. E се отразява от хоризонталното огледалото, като $\measuredangle DEF = \pi - 2\alpha$ ($EF \parallel AO$). В т. F влиза в пластината и отново се пречупва, като се приближава към нормалата и излиза от т. B ($FB \parallel AC$).



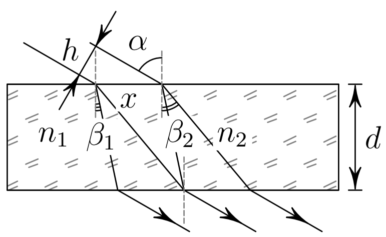
(2.5 т.)

За да намерим разстоянието AB може да използваме, че $ACFB$ е успоредник, тогава $AB = CF = 2CG = 2(HG - HC)$. **(1 т.)** $\triangle AHG$ е правоъгълен, като $\measuredangle GAH = \alpha$, т. е. $HG = d\tan\alpha$. **(0.5 т.)** HC може да изразим от $\triangle AHC$, $HC = d\tan\beta$, **(0.5 т.)** където с β сме означили ъгъла на пречупване в т. A. От закона на Снелиус може да запишем, че $\sin\alpha = n\sin\beta$. **(0.5 т.)** Така получаваме $AB = 2(HG - HC) = 2d(\tan\alpha - \tan\beta)$ или:

$$AB = 2d\sin\alpha\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right) \textbf{ (1 т.)}$$

Решение 3.2. Дебелината на пластината ще е минимална, ако няма разстояние между двата излизащи снопа. От фигурата се вижда, че това е изпълнено, когато:

$$x = \frac{h}{\cos\alpha} = d(\tan\beta_2 - \tan\beta_1). \textbf{(1.5 т.)}$$



(1 т.)

От закона на Снелиус може да запишем $\sin\alpha = n_i \sin\beta_i$, където $i = 1, 2$. **(0.5 т.)** Като използваме, че $\sin^2\beta_i + \cos^2\beta_i = 1$, може да изразим $\tan\beta_i = \sin\alpha/\sqrt{n_i^2 - \sin^2\alpha}$. Така за дебелината на пластината получаваме:

$$d = h\left[\sin\alpha\cos\alpha\left(1\Big/\sqrt{n_2^2 - \sin^2\alpha} - 1\Big/\sqrt{n_1^2 - \sin^2\alpha}\right)\right]^{-1} \textbf{ (1 т.)}$$