МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
14 – 16 март 2025 г., Ловеч
Решения на темата за IV състезателна група (10. клас)

Задача 1. Макари и трупчета

Част I а) На дясното трупче действа силата на тежестта $G_д = m_д g$ надолу и силата на опън $T_д$ на дясната нишка нагоре. **[0,2 т.]** Тъй като средната макара е безмасова, силата на опън на лявата нишка е $T_л = 2T_д$. **[0,3 т.]** На лявото трупче действа силата на тежестта $G_л = m_л g$, а силата на опън от страна на лявата макара е $2T_л = 4T_д$ (поради факта, че макарата е безмасова). **[0,5 т.]** Като приложим II принцип на Нютон, ще получим: $T_д - m_д g = m_д a_д$ **[0,5 т.]** (за дясното трупче) и $m_л g - 4T_д = m_л a_л$ **[0,5 т.]** (за лявото трупче). Може да се съобрази, че $a_д = 4a_л$, тъй като дясното трупче изминава четворно по-голям път от лявото трупче, а пътят е пропорционален на ускорението при движение без начална скорост. **[0,5 т.]** От горните уравнения следва, че $a_л = \frac{m_л - 4m_д}{m_л + 16m_д} g = \frac{g}{6} \approx 1{,}7\ \mathrm{m/s^2}$, а $a_д = \frac{4(m_л - 4m_д)}{m_л + 16m_д} g = \frac{2g}{3} \approx 6{,}7\ \mathrm{m/s^2}$. **[1 т.]**

б) От решението на предишното подусловие се вижда, че $T_д = m_д(g + a_д) = m_д(g + 4a_л) = \frac{5m_л m_д g}{m_л + 16m_д} \approx 1{,}7$ N. **[0,5 т.]** Силата на опън на лявата нишка е $T_л = \frac{10m_л m_д g}{m_л + 16m_д} \approx 3{,}3$ N. **[0,5 т.]**

Част II а) Тъй като в началото движението на системата е равномерно и сумарните сили върху трупчетата са нулеви, въпреки че масата на дясното трупче е двойно по-голяма от масата на лявото, дясното трупче има първоначално положителен заряд q, а лявото е отрицателно заредено. Условията за нулиране на силите върху трупчетата са: $T_{нач} - mg - qE = 0$ **[0,5 т.]** (за лявото трупче) и $2mg - T_{нач} - qE = 0$ **[0,5 т.]** (за дясното трупче). Събираме уравненията и получаваме, че $q = \frac{mg}{2E}$. **[0,5 т.]** Като приложим II принцип на Нютон за движението след смяната на знаците на зарядите, ще получим: $T_{кр} - mg + qE = ma$ **[0,5 т.]** (за лявото трупче) и $2mg - T_{кр} + qE = 2ma$ **[0,5 т.]** (за дясното трупче). Отново събираме уравненията и получаваме $a = \frac{mg + 2qE}{3m} = \frac{2g}{3} \approx 6{,}7\ \mathrm{m/s^2}$. **[1 т.]**

б) От уравненията по-горе се вижда, че $T_{нач} = \frac{3mg}{2}$, а $T_{кр} = \frac{7mg}{6}$, т.е. $T_{нач} - T_{кр} = \frac{mg}{3}$ и $m = \frac{3(T_{нач} - T_{кр})}{g} \approx 0{,}6$ kg. **[1 т.]** Съответно $T_{нач} = \frac{9(T_{нач} - T_{кр})}{2} = 9$ N. **[0,5 т.]**

в) Големината на зарядите на трупчетата е $q = \frac{mg}{2E} = \frac{3(T_{нач} - T_{кр})}{2E} = 3$ μC. **[0,5 т.]**

Задача 2. Електростатика

Част I Зарядът на топчето е отрицателен, а полето е насочено надолу, така че електричната сила ще е нагоре. Тъй като посоката на сумарната сила не е определена, ще разгледаме и двата случая – движение нагоре и надолу. Уравнението на Нютон за движение на топчето нагоре е $qE - mg = ma$. **[0,5 т.]** Оттук $m = \frac{qE}{g + a} = \frac{2sqE}{2sg + v^2} \approx 50$ g. **[1 т.]** За движение надолу $mg - qE = ma$ и $m = \frac{qE}{g - a} = \frac{2sqE}{2sg - v^2} \approx 75$ g. **[1,5 т.]**

Част II а) В началото пружините не са разтегнати или свити. След зареждането теглилките се привличат със сили $\frac{kqQ}{\ell_1^2}$, които се уравновесяват от еластичните сили. **[0,5 т.]** Ако означим разтеженията на пружините с x_1, то $\ell_1 = \ell_0 - 2x_1$. **[0,5 т.]** От условието за равновесие следва, че $\varkappa x_1 = \frac{\varkappa(\ell_0 - \ell_1)}{2} = \frac{kqQ}{\ell_1^2}$. **[0,5 т.]** След свързването зарядите се преразпределят и теглилките стават отрицателно заредени със заряд $\frac{Q-q}{2}$. **[0,5 т.]** В този случай теглилките се отблъскват и пружините са свити с x_2, така че $\ell_2 = \ell_0 + 2x_2$. **[0,5 т.]** От условието за равновесие следва, че $\varkappa x_2 = \frac{\varkappa(\ell_2-\ell_0)}{2} = \frac{k(Q-q)^2}{4\ell_2^2}$. **[1 т.]** Оттук следва, че $Q = q + \sqrt{\frac{2\varkappa(\ell_2-\ell_0)}{k}}\ell_2$. **[0,5 т.]** Като заместим в предишното условие за равновесие, ще получим квадратното уравнение $q^2 + \sqrt{\frac{2\varkappa(\ell_2-\ell_0)}{k}}\ell_2 q - \frac{\varkappa(\ell_0-\ell_1)}{2k}\ell_1^2 = 0$. **[0,5 т.]** Положителният корен на уравнението е $q = \sqrt{\frac{\varkappa(\ell_0-\ell_1)}{2k}\ell_1^2 + \frac{\varkappa(\ell_2-\ell_0)}{2k}\ell_2^2} - \sqrt{\frac{\varkappa(\ell_2-\ell_0)}{2k}}\ell_2$. **[1 т.]** Съответно $Q = \sqrt{\frac{\varkappa(\ell_0-\ell_1)}{2k}\ell_1^2 + \frac{\varkappa(\ell_2-\ell_0)}{2k}\ell_2^2} + \sqrt{\frac{\varkappa(\ell_2-\ell_0)}{2k}}\ell_2$. **[0,5 т.]**

б) Веднага след свързването на всяка една теглилка действа сумарна сила $\frac{\varkappa(\ell_0-\ell_1)}{2} + \frac{k(Q-q)^2}{4\ell_1^2} = \frac{\varkappa(\ell_0-\ell_1)}{2} + \frac{\varkappa(\ell_2-\ell_0)\ell_2^2}{2\ell_1^2} = \frac{\varkappa}{2}\left(\ell_0 - \ell_1 + \frac{(\ell_2-\ell_0)\ell_2^2}{\ell_1^2}\right)$. **[1 т.]**

Задача 3. Електрически вериги

Част I Еквивалентното съпротивление на веригата е $R_{\text{екв}} = R_1 + \frac{R_2(R_3+R_x)}{R_2+R_3+R_x}$. **[1,5 т.]** Токът през батерията е $I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{екв}}}$. **[0,5 т.]** Напрежението върху горните два резистора е $U = \mathcal{E} - IR_1$. **[0,5 т.]** Токът през резистора с неизвестно съпротивление е $I_x = \frac{U}{R_3+R_x}$. **[0,5 т.]** Мощността $P_x = I_x^2 R_x = \frac{\mathcal{E}^2 R_2^2 R_x}{[R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3+(R_1+R_2)R_x]^2}$. **[1,5 т.]** За търсеното съпротивление получаваме следното квадратно уравнение: $(R_1+R_2)^2R_x^2 - \left(\frac{\mathcal{E}^2R_2^2}{P_x} - 2(R_1+R_2)(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)\right)R_x + (R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)^2 = 0$. **[0,5 т.]** Търсеното съпротивление е двоен корен на уравнението: $R_x = \frac{\mathcal{E}^2R_2^2 - 2(R_1+R_2)(R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3)P_x}{2(R_1+R_2)^2P_x} \approx 267\ \Omega$. **[1,5 т.]**

Част II При успоредното свързване напрежението $U_{\text{усп}}$ върху кондензатора е същото като напрежението върху резистора, т.е. $U_{\text{усп}} = \frac{\mathcal{E}R}{R+r}$, където с $\mathcal{E}$ сме означили електродвижещото напрежение на батерията. **[1 т.]** При последователното свързване не тече ток във веригата и напрежението върху кондензатора съвпада с напрежението на батерията: $U_{\text{посл}} = \mathcal{E}$. **[0,5 т.]** Дадено е, че $q_{\text{посл}} = CU_{\text{посл}} = C\mathcal{E} = 1{,}05q_{\text{усп}} = 1{,}05CU_{\text{усп}} = \frac{1{,}05C\mathcal{E}R}{R+r}$. **[1 т.]** Оттук следва, че $r = 0{,}05R = 1\ \Omega$. **[1 т.]**