

Структуриране знанията за статичните, стационарните и променливите електромагнитни явления по модела за физична теория

Като наука електродинамиката има едно изключително важно от дидактическа гледна точка качество: тя включва два раздела, посветени на електростатичните явления и на стационарните магнитни явления, които сами за себе си могат да се представят по модела за физични теории. Това й качество отбелязва още Максвел¹, който разглежда описанията на явленията в тези области като (в неговата терминология) отделни "математически теории". Дидактическата ценност на този факт се определя от възможностите, които той предоставя за постепенно изграждане на модела на физичните теории и за затвърдяването му при неколкостепенното (по същество – трикратно) прилагане на една и съща схема.

Целенасоченото използване на това качество на електродинамиката при структуриране на учебното съдържание ще спомогне да се избегне най-характерният от светогледна гледна точка пропуск в знанията на учениците: липсата на ясни представи за взаимовръзките между електрично поле, магнитно поле и електромагнитни вълни.

В исторически аспект първоначално теориите на електричните и на магнитните взаимодействия се развиват независимо една от друга. Както поради това, така и поради същностните различия между електричните и магнитните явления, начините за тяхното изучаване са също различни. Тъй като обаче основата им е една – те са части на теорията на единното електромагнитно поле, подчертаването на общите им елементи е желателно от гледна точка на повишаване ефективността на обучението. Наличието и използването на общи понятия и величини, а така също и единен образец на мисленето улесняват както усвояването им поотделно, така и разбирането на тяхната връзка. По този повод се посочва², че ако трябва "да унифицираме подходите към двата раздела на електродинамиката – електростатиката и стационарните полета, ние трябва да търсим общи понятия и явни или скрити изоморфни структури в теориите, които съдържат нашето научно знание". Въпросните общи понятия и изоморфни структури се разкриват именно при структуриране на знанията в двете области във вид на физични теории.

Ръководна идея при изграждане на електростатиката и на теорията на стационарното магнитно поле, е максимално да се използва това, което наричаме магнито–електричен паралелизъм. Този паралелизъм се проявява, когато в основата на теорията на магнитните взаимодействия се постави не взаимодействието между магнитни полюси, а взаимодействието между токове. Единственото неудобство при този подход е от терминологично естество – оказва се, че при този подход аналог на интензитета на електричното поле е не интензитетът на магнитното поле, а неговата индукция. Това обаче е твърде ниска цена за очевидните преимущества на подхода.

Към тези преимущества следва да се отнесе преди всичко едно, което е тясно свързано с увеличаването на ролята на методологичните знания в обучението. Обикновено се смята, че действието на общонаучния *принцип на съответствието* може да се разкрие само чрез съвременните физични теории (квантова физика, специална теория на относителността). Действието на този принцип се илюстрира обаче и в електродинамиката, тъй като общата теория на електромагнитното поле съдържа в себе си като частни случаи и електростатиката, и теорията на стационарните магнитни взаимодействия.

¹ Максвелл и развитие физики XIX - XX веков Отв.ред. Л.С.Полак, М., Наука, 1985.

² Burkhardt H. *System Physics: A uniform approach to the branches of classical physics*, Am. J. Phys., 55 (4), 1987.

Преди да преминем към изложението на трите теории ще отбележим следните две обстоятелства. Първо, както и до сега, и тук се интересуваме само от електромагнитните взаимодействия във вакуум, т.е. разглеждаме въпроси, по същество свързани само с теорията на електромагнитното поле. Никъде не се обръща внимание на явления или свойства, дължащи се на факта, че зарядите и токовете се намират в някакви среди, поради което не става дума за диелектрици, проводници, феромагнетици и т.н.

Второ, за въпросите, чието решение е отдавна известно в методиката, само се маркират съответните отговори, като вниманието се насочва предимно към моментите с приносен характер.

Според своето равнище на достъпност включените тук знания могат да се разпределят в три групи, адресирани към различни участници в учебния процес:

– първата, относително малобройна група знания, които следва да намерят място в курса, който осигурява задължителното базисно образование по физика;

– втората, най-многобройна група, включва знания, които следва да намерят място при изграждане на системния курс по физика, осигуряващ профилирана подготовка за учениците, обучаващи се в природонаучното направление;

– третата, най-малобройна група, включва въпроси, които поради по-абстрактния си характер или поради това, че третирането им е свързано с определени математически трудности, могат да се разглеждат само с групи или да се предоставят за самостоятелна работа на отделни ученици с подчертан вкус към подобен род интелектуални предизвикателства.

Във връзка с третата група знания трябва да се отбележи следното. Включването на знания от тази група се налага от изискването учебното съдържание да отчита потребностите и интересите на учениците. В почти всеки випуск във всяко училище има поне няколко ученика с по-специална нагласа към изучаването на физиката, за които всяка празнина в логиката на изложението е източник на неудовлетворение. Запълването на подобни празнини представлява за тях своеобразно интелектуално предизвикателство и удовлетворяването на подобни интелектуални потребности способства максимално за умственото развитие на тези ученици. Те с готовност ползват разнообразна странична литература и именно тях учителят следва да насочва към запознаване с проблемите от третия вид.

Последователното излагане на електростатиката, теорията на стационарното магнитно поле и на променливото поле във формата на относително завършени физични теории нееднократно изисква прилагане на някои специфични прийоми и математични изводи, които изискват по-детайлно обосноваване. Поради тази причина един такъв прием е разгледан преди излагането на споменатите три теории.

1. Получаване на общи резултати на основата на частни примери

В класификацията на методите на обучение по физика, според решаваната от тях дидактическа задача фигурират така наречените методи за придобиване на знания. Обикновено се приема³, че "те носят в себе си логиката на методите на изучаваната наука" и поради това при обсъждането им като правило не се отива много по-далеч от изреждането и описанието на такива общонаучни методи като анализ и синтез, индукция и дедукция и др.п. Сред конкретните методи за придобиване на знания по физика, обаче, има и такива, които нямат аналог в научното познание и все още анализът им не е намерил подобаващо място в методическата литература.

³ *Основы методики преподавания физики в средней школе*, Под ред. Перышкина и др., М., Просвещение, 1984.

Известно е, че за да може от основните закони на една теория да се изведат производни закони, теорията трябва да притежава съответния апарат, който за физиката най-често е апаратът на математиката. Изучаването на електродинамиката изисква относително сложен математичен апарат и един от проблемите в училищния курс по физика произтича от факта, че учениците не разполагат с такъв. Поради тази причина изходът често се търси в използването на качествени и полуколичествени геометрични и физични представи (например за брой на векторни линии през дадена повърхност, работа по дадена крива и пр.), чрез които става възможно поне да се формулират законите, ако не и да се изведат строго.

По-долу се разглежда един частен методичен прием, използването на който дава възможност при излагане разделите на електродинамиката като отделни физични теории да се следва една до голяма степен непрекъсната логична линия. Този прием се прилага, когато трябва да се стигне до някоя количествена зависимост, но липсват средства за извода ѝ в общия случай. Неговата същност се свежда до следните три етапа:

- **Проблемът се редуцира до частен случай, в който търсената зависимост може да се получи с достъпни математически средства.**
- **Резултатът се формулира по начин, който не отразява особеностите на частния случай.**
- **По метода на непълната индукция резултатът се обявява за общовалиден.**

По същество приемът може да се отнесе към групата на логическите прийоми, като същевременно носи белезите на знаковите модели, защото в основата му лежи изразяването на отношения и свойства на моделирания обект с помощта на формули. Разгледан като елемент на учебния метод на теоретичното познание, той може да бъде отнесен към така наречените теоретически изводи чрез математически преобразования. Обикновено математическите изводи на формули се класифицират към дедуктивните прийоми, защото от една (или няколко) формули като следствие се получава желаният резултат. В разглеждания случай срещаме своеобразно съчетание на дедуктивния подход при разглеждане на конкретната частна постановка с индуктивния, който е в основата на прехода от частния към общия случай. Разбира се, заради непълната индукция можем да говорим само за евристична, но не и за доказателствена стойност на приема. По-долу ще покажем, обаче, че в това отношение съществуват и важни изключения.

Най-типични примери за прилагане на интересувания ни прием се намират при излагане основите на електродинамиката. Тук ще разгледаме по-подробно някои от тях, които ще послужат за въвеждане на определена класификация сред тях. Първият пример е теоремата на Гаус, която се изучава в часовете за СИП по физика в 9. клас и при изучаването на електромагнитните явления на второ равнище в 11. клас. Тази теорема е следствие от фундаменталния експериментален закон на Кулон, но доказателството ѝ в общия случай не е елементарно. Затова в училище се разглежда частният случай на поле, създадено от точков заряд, разположен в центъра на сферична повърхност, през която се пресмята потокът на полето. В този случай с елементарни средства се извежда, че потокът на полето през повърхнината е равен на заградения от нея заряд, разделен с ϵ_0 . Формулиран по този начин, резултатът наистина не съдържа специфичните особености на частния случай – в него не участва радиусът на сферата, не се споменава дори, че става дума за сфера и за поле на точков заряд в центъра ѝ.

По-нататък би следвало въз основа на доказани резултат да се направи обобщение, като последователно се разгледат случаите, когато зарядът не е в центъра

на сферата, когато е извън нея, след това за произволна по форма повърхност и накрая, посредством принципа за суперпозицията – за случая на поле на произволни заряди. Във всеки от тези случаи изводът би бил все един ни същ – по форма съвпадащ с формулирания по-горе. Тези етапи, не толкова заради математически трудности, а по-скоро поради липса на време, се пропускат и полученият в частния случай резултат:

$$(1.1) \quad \Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

се обявява за общовалиден.

Втори типичен пример представлява изводът на формулата за плътност на енергията на електричното поле. Частният случай е поле на плосък кондензатор. В този случай не е трудно да се пресметне работата на електричните сили при разреждане на кондензатора, т.е. – неговата енергия. Резултатът ($W_e = \frac{1}{2} CU^2$) зависи от спецификата на случая (от капацитета C на кондензатора) и не е подходящ за обобщение. Ако, обаче, общата енергия се раздели на обема на кондензатора и се пресметне енергията в единица обем, т.е. плътността на енергията, в получената формула

$$(1.2) \quad w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

вече липсват спецификите на частния случай – в нея не участват нито размерите на кондензатора, нито напрежението между електродите му, нито даже фактът, че пресмятането е проведено именно за плосък, а не за друг вид кондензатор. Именно този резултат е общовалиден.

По подобен начин се излагат аргументите, чрез които се достига до:

– израза за връзката между повърхнинната плътност на зарядите върху проводник и интензитета на полето до повърхността:

$$(1.3) \quad \sigma = \epsilon_0 E;$$

– израза за плътността на магнитната енергия чрез разглеждане процеса на установяване тока в цилиндрична намотка, свързана с източник на постоянно ЕДН⁴:

$$(1.4) \quad w_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2;$$

– закона на Ампер за тока от закона на Ампер за магнитната сила⁵ (129, с.12):

$$(1.5) \quad \Gamma_B = \mu_0 J;$$

хипотезата за тока на отместване⁶:

$$(1.6) \quad \Gamma_B = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\Delta \Phi_E}{\Delta t};$$

формулата на Максвел за скоростта на разпространение на електромагнитното поле⁷:

$$(1.7) \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}.$$

⁴ Попов Хр. *Извод на формулата* $w_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2$, Физика, 1, 1990.

Попов Хр., Т.Сугарев, Др.Иванов *Физика за 11.клас на СОУ, Електродинамика*, С., Просвета, 1992.

⁵ Попов Хр. *Една възможност за извеждане на формулата за индукцията на магнитното поле на постоянен ток по безкраен прав проводник*, Физика, 1, 1982.

⁶ Попов Хр. и др. *Учебно пособие по физика за свободноизбираема подготовка в 10.клас на ЕСПУ*, С., Народна просвета, 1986.

⁷ Попов Хр. *Следствия от уравненията на Максвел*, Физика, 6, 1990; 1, 1991.

Приведените примери вече дават възможност за класификация. Признакът, по който се провежда тя е видът на установената връзка – дали тя е глобална или локална. Формули (1.1), (1.5) и (1.6) представляват *глобални* връзки, докато формули (1.2), (1.3), (1.4) и (1.6) са *локални*.

Очевидно е, че разширяването на валидността на глобалните връзки извън частните случаи, за които са доказани, е логически необосновано. За общите случаи изводите им притежават само илюстративна, но не и доказателствена стойност.

По-различно е положението с връзките от локален вид. И при техния извод се използва някакъв частен нелокален модел (плосък кондензатор, цилиндрична намотка, метална сфера и пр.). Локалността на получената връзка, обаче, е основание на твърдението за общовалидността ѝ. Обосновката на това твърдение е в смисъла на полевия подход, който от своя страна представлява една реализация на принципа на близкото действие. Наистина, според принципа на близкото действие всички прояви на полето в дадена точка и в даден момент трябва да могат да се опишат само с величини, характеризиращи полето в тази точка, в този момент и в тяхната най-близка околност. По такъв начин локалната връзка не може да зависи от особеностите на конкретния локален модел, с чиято помощ е получена.

И така, в случаите на локални връзки, разглежданият прием притежава доказателствена стойност и тя произтича от самата същност на полевия подход. Това разкрива още една, неочаквана от дидактична гледна точка, страна на продуктивността на идеята за близкодействие и на опирация се на нея полевия подход за описание на електромагнитните взаимодействия: оказва се, че *близкодействието е в основата на един широко приложим учебен прием на теоретичното познание, чрез който се получават редица важни резултати*. До сега този прием се използва без да се подчертава доказателствената му сила, т.е. без да се прави разлика между двата принципно различни случая – случаите на локални и случаите на глобални връзки.

2. Електростатиката като физична теория

Основата на електростатиката включва:

- едно фундаментално явление – привличането и отблъскването между неподвижните електрични заряди;
- един фундаментален експериментален закон – закона на Кулон;
- две фундаментални понятия – електричен заряд и електрично поле.

Два са и **основните закони**, образуващи ядрото на тази теория – теоремата на Гаус и твърдението за консервативността на електростатичните сили.

По-долу се разглеждат някои възможности за излагане на електростатиката като структурирано физично знание, като вниманието е насочено само към въпроси, свързани с нейната основа и с основните ѝ закони. Следствията на теорията (връзка между интензитет на полето и плътност на зарядите върху повърхността на проводник, извод на формулата за капацитет на плосък кондензатор и др.), са известни отдавна и поради тази причина тук те не се разглеждат.

2.1. За свойствата на електричния заряд

Свойството на електричните заряди да бъдат точно два вида учениците познават от 6. клас и стават дотолкова фамилиарни с него, че по същество започват да го приемат като нещо тривиално, разбиращо се от само себе си. Именно в този насока могат да се развият разглежданията, когато се излезе от рамките на общозадължителния минимум.

Първото задълбочаване в този насока може да се направи в 9. клас в рамките на системния курс, където вече се обръща внимание на смисъла, който се влага в твърдението, че зарядът е *фундаментално понятие*. Тук фактът, че електричните за-

ряди са два вида трябва да се съпостави с други експериментално установени факти със същия характер: с факта, че гравитационните заряди на всички тела (техните маси) са само един вид (положителни); и с факта, че зарядите на кварките, които определят техните силни взаимодействия, са три вида (условно – червени, зелени и сини). По такъв начин при съпоставянето на броя на зарядите, които определят различни фундаментални взаимодействия, става вече напълно ясно, че наличието на тъкмо два вида електрични заряди – положителни и отрицателни, не следва от никъде и е резултат само от обобщаване на данните от опита.

В рамките на общозадължителния минимум в 9. клас учениците се запознават с повечето от останалите свойства на заряда. Извън вниманието остават само независимостта му от скоростта на телата и липсата на безмасови заредени частици. И двете тези свойства следва да намерят място в системния курс, като първото отново се съпостави със съответното свойство на гравитационния заряд, който, за разлика от електричния, зависи от скоростта на движение. Липсата на безмасови заредени частици от своя страна може да стане повод за обсъждане ограничеността на нашите знания, която ограниченост за сега не позволява да разкрием очевидно съществуващата вътрешна връзка между двата заряда (масата и електричния заряд).

При обсъждане на останалите свойства на електричния заряд следва да се отдели достатъчно внимание на *принципа на суперпозицията*. Досегашният опит той да се остави извън рамките на общозадължителния минимум се оказва неуспешен – чувстватйки необходимостта от него, учителите сами го включват в учебното съдържание. Вниманието в тази насока трябва да бъде насочено към разграничаване принципа за независимост на действието на силите, действащи върху едно тяло, познат от механиката и принципа на суперпозицията. От механиката е известно, че общата сила, която действа на едно тяло, е векторна сума от всички приложени върху тялото сили. В училище съществува тенденция за отъждествяване смисъла на това твърдение с принципа на суперпозицията в електродинамиката. Последният принцип обаче съдържа нещо съществено повече – според него всяка от отделните действащи на един заряд електрични сили се подчинява на закона на Кулон, като това твърдение е пряко следствие от последното от седемте свойства на зарядите – че взаимодействието между два заряда *не зависи* от наличието на други заряди в пространството.

2.2. Електричното поле като фундаментално понятие в електростатиката

Въпросите, свързани с фундаменталността на понятието поле, бяха дискутирани достатъчно подробно другаде, тук обръщаме внимание преди всичко на проблеми, свързани с обосновката на т. нар. *обективен характер* на електромагнитното поле.

2.2.1. Наличието на енергия на полето – ключ към разбиране на обективността му

Обикновено въпросът за обосноваване обективността на електромагнитното поле се свързва преди всичко с доказателството, че на полето са присъщи атрибутите, приписвани на други материални обекти (каквито са например частиците) – енергия, импулс и момент на импулса. Въпросът за момента на импулса на полето излиза извън обсега на разглежданията дори на много от университетските курсове по електродинамика. На равнището на обучение в средното училище, почти не се засяга и въпросът за наличието на импулс на полето. Поради тази причина в училищните курсове по физика обикновено обективността на електромагнитното поле, т.е. фактът, че то е нещо повече от един удобен математически инструмент за описание на определен кръг явления, се свежда до обсъждането на въпроса за енергията на полето. Именно този факт определя ключовото място на разглежданията, насочени да доведат

учениците до заключението, че полето притежава енергия и до количествените зависимости, свързани с тази величина.

Вече бе отбелязано, че както в рамките на електростатиката (и дори в рамките на по-общата теория на стационарното електрично поле), така и за стационарното магнитно поле **не е възможно да се докаже наличието на енергия за всяко от тези полета поотделно**. (Този факт е тясно свързан с дискутирания и от друга гледна точка в въпрос за обективността на електричното и на магнитното полета. Ясно е, че щом обективна реалност е само електромагнитното поле, то е безсмислено да се търсят начини за доказване, че стационарните електрично и магнитно полета притежават енергия – за взаимодействията в тези случаи са възможни както полевият подход, така и подходът на далечното действие, така че въпросът дали енергията е разпределена в полето или е съсредоточена във взаимодействащите обекти не може да бъде решен в рамките на тези частни теории.) Поради тази причина в училищните курсове, без да се навлиза в детайли, на практика се приема *ad hoc*, че полето притежава енергия и усилията се съсредоточават върху въпросите за количествените зависимости, свързани с тази величина. Ето защо последващото изложение включва преди всичко въпроси, свързани с подобни количествени зависимости.

Във връзка с току що казаното ще отбележим, че не са изключение случаи, в които наличието на енергия на полето се обосновава с обстоятелството, че породените от полето сили могат да предизвикат движение на телата. Така например често от това, че магнитните стрелки в магнитно поле се завъртат, се прави заключение, че при тези процеси става преобразование на енергията на магнитното поле в механична енергия. Взето само за себе си, това твърдение е вярно, но разгледано в контекста на общата постановка то може да доведе до абсурдни заключения. Наистина, в училище не се разглежда общото поле, създадено от постоянния магнит и стрелката (чиято енергия след завъртане на последната наистина намалява), а се има предвид полето само на магнита, което обаче и преди и след завъртането е едно и също, а следователно една и съща е и енергията му. С други думи, ако разглежданията в посочения пример се проведат до край, заключението ще бъде, че механичната енергия при завъртането се е получила без да се изразходва друг вид енергия.

2.2.2. Енергия на електричното поле

Относително по-ниското равнище на обучение по физика у нас обяснява защо дълго време въпросът за енергията на електричното поле и за връзките на тази величина с характеристиките на полето не фигурира в учебното съдържание. Той не се разглежда дори в сравнително най-задълбочените наши учебници по физика от началото на седемдесетте години, където не се стига по-далече от величината потенциална енергия на взаимодействие на заряд в електростатично поле. Този недостатък на учебните програми се чувства най-силно при преподаване на въпросите за електромагнитни вълни.

В същото време в развитите страни този въпрос е отдавна разработен в методическо отношение и включен в курсовете за средните училища. И в тези курсове, обаче, аргументация за това, защо се счита, че полето притежава енергия или не се дава, или авторите се задоволяват с някакво палиативно решение. Най-често се обръща внимание на факта, че за да се заредят телата (а значи – и за да се създаде поле) е необходимо да се извърши работа за сметка на енергията на някакъв източник. И след това, въз основа на закона за запазване на енергията се заключава, че тази енергия не може да изчезне и – че е съсредоточена в полето. В светлината на казаното по-горе е ясно, че такава аргументация не издържа на проверката на логиката. Също често, след като се въведе коректно величината потенциална енергия на взаимодействие на заряди,

започва да се използва по-краткия термин потенциална енергия на системата (напр. на зареден кондензатор) и накрая, негласно, тази енергия се приписва на полето в системата.

При количествената трактовка на въпроса се използват два подхода. Единият от тях се свежда до пресмятане на работата на електричните сили при сближаване и допиране на електродите на зареден плосък кондензатор. Неговите недостатъци са два. Първо, той изисква едно допълнително разсъждение за обясняване на факта, че на зарядите от едната плоча действа поле с интензитет $E/2$ (а не E), което разсъждение е по същество външно спрямо интересувания ни въпрос и следователно излишно ангажира вниманието. Вторият недостатък, обаче, е по-съществен – подходът от самото начало се ограничава с разглеждането на хомогенно поле (плосък кондензатор).

Вторият подход е по-разпространен и включва пресмятане работата в процеса на зареждане (или разреждане) на плосък кондензатор. Трудността при прилагането му произтича от промяната на електричното поле в кондензатора в хода на този процес. Това налага използване на операцията интегриране. В курсовете, които разчитат на по-висока математическа подготовка на учениците, резултатът се получава директно, а в тези, в които не се използва интегриране, то се извършва фактически неявно. Единият, по-рядко използван метод за това, свежда пресмятането до използване формулата за сума на аритметична прогресия⁸, а по-разпространеният използва геометрични съображения, като свежда въпроса до използване формулата за лице на триъгълник⁹. Когато разглежданията не са съвсем строги, резултатът от интегрирането, т.е. появата на множителя $1/2$, се обяснява просто като резултат от осредняването между началната и крайната стойности на напрежението на кондензатора.

Независимо от това, кой метод за неявно интегриране се използва, след получаване на резултата – $W_e = \frac{1}{2}CU^2$, чрез разделянето му с обема на кондензатора се преминава към получаване на формулата $w_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ за плътността на енергията на полето. Тъй като получената връзка е с локален характер, обаче, по силата на коментирания преди методичен прийо̀м, тя е общовалидна.

2.2.3. Обща връзка между енергията и интензитета на електричното поле

От методична гледна точка недостатъците на споменатите разглеждания, които водят до формулата за плътността на енергията на електростатичното поле са добре известни и често коментирани в литературата. Така (вж. напр.¹⁰) преди всичко в тях се разглежда един твърде частен случай – факт, който винаги оставя съмнение относно валидността на направените изводи за произволни полета (съображенията, свързани с идеологията на полевия подход са твърде абстрактни дори за учениците, имащи повишена мотивация за изучаване на физиката). Втори недостатък е необходимостта с пространни разсъждения да се търси начин за заместване на една такава по същество проста операция, каквато е интегрирането.

От гледна точка на изтъкнатите недостатъци е интересно, че зависимостта на енергията на полето от неговата силова характеристика – интензитета, може да се получи с несложни разсъждения с помощта на няколко най-общи (и същевременно – най-прости) твърдения. За пръв път тази възможност е разкрита във вече цитирания

⁸ Hofling O. *Physik*, b.II, t.2, Dummler, Bonn, 1983.

⁹ Muller A., E.Leitner, F.Mraz *Physik*, 1 Sem., Munchen, Ehrenwirt, 1982.

¹⁰ Brody H. *A simple proof that the energy stored in an electric field is proportional to the magnitude of the field strength squared*, Am.J.Phys., 36, 914-915 (1968).

източник под номер 10, който обаче разглежда частния случай на взаимодействие на малки (по размер, но не точкови!) заряди. (Авторът не се занимава с точкови заряди с очевидната цел да избегне усложненията, дължащи се на безкрайната им собствена енергия.) Особеностите на този случай, които не позволяват директно обобщение за произволни системи от заряди могат да се разберат от следните съображения:

– Малките заряди могат *само* да се привличат или *само* да се отблъскват. В случая на произволни системи от заряди взаимодействието вече не е толкова определено – възможно е при едно взаимно разположение на системите двете общи сили на взаимодействие да бъдат сили на отблъскване, а при друго разположение - сили на привличане. (Най-простият пример, илюстриращ тази ситуация, са силите, с които си взаимодействат два електрични дипола.)

– Докато за характеристиката на полето – интензитета, е валиден принципът за суперпозицията, за енергията на полето той е неприложим (т.е. сумата от енергиите на полетата на две системи от заряди не е равна на енергията на полето на системата, която се получава когато тези две системи се разглеждат като една). Поради тази причина преходът от малки към крайни по размер заряди не е тривиален.

Гореизложените съображения налагат да се търси обобщение на въпросния извод. Това обобщаване е направено в¹¹. Неговата същност се излага по-долу, като ключова роля в разглежданията играе понятието конгруентни системи от заряди.

Поставеният проблем може да се формулира по следния начин. Съгласно идеологията на близкостта (или все едно – на частната му реализация в полевия подход), една механична величина, каквато е енергията на полето W_e , трябва да може да се изрази чрез неговата характеристика – интензитета $E(r)$. Тъй като W_e е глобална величина, а $E(r)$ – локална, най-общата връзка между тях има вид на функционал от типа

$$(2.1) \quad W_e = \int_{V_\infty} F[E(r)] dv,$$

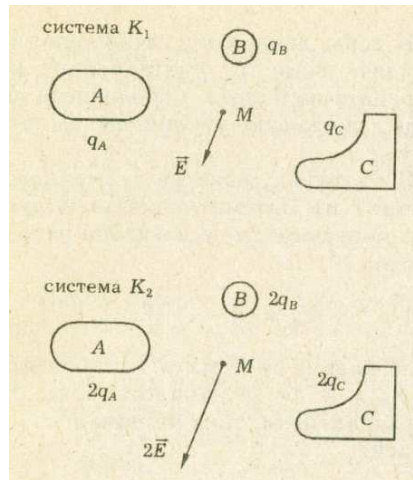
където интегрирането е разпространено върху цялото пространство V_∞ . Въпросът се свежда до определяне вида на функцията F , като за целта се използват само най-общи съображения.

Преди да пристъпим директно към търсене отговор на така поставения въпрос въвеждаме следните означения. Нека K_1 е произволна система от неподвижни заряди (точкови или непрекъснато разпределени), W_1 – енергията на полето ѝ, а E_1 – интензитетът на полето във фиксирана т. M (фиг. 1). Нека K_{-1} е системата, която се получава от K_1 чрез едновременно смяна на знаците на всички нейни заряди, W_{-1} – енергията на полето на K_{-1} , а E_{-1} – интензитетът на полето на K_{-1} в същата т. M . Накрая, нека K_2 е системата, която се получава при удвояване на всеки заряд от K_1 , W_2 – нейната енергия и E_2 – интензитетът на полето ѝ в т. M .

Ясно е, че по подобен начин, чрез умножаване на всички заряди с едно и също число n може да се получи произволна (в определен смисъл) система K_n . Тъй като пространственото разпределение на зарядите в K_1 , K_{-1} , K_2 и т.н. е еднакво (вж. фиг. 1), кои да е две от тези системи могат да бъдат съвместени, т.е. поставени "една в друга" така, както могат да бъдат съвместени две конгруентни тела. Поради тази причина системите K_n ще наречем конгруентни системи от заряди.

Очевидно е, че от съвместяването на K_1 и K_{-1} се получава система K_0 (система без заряди), в която $E = 0$ за всички точки на пространството, тъй зарядите на съвместените системи K_1 и K_{-1} взаимно се компенсират. От съвместяването пък на две системи K_1 се получава K_2 и т.н.

¹¹ Попов Хр. *За зависимостта на енергията на полето от интензитета му*, Физика, 5, 1993, с.22 - 25.



Фиг. 1.

Изводът на интересуващата ни зависимост се опира на следните четири твърдения, които играят роля на основни предпоставки, върху които се градят разсъжденията:

1. Определението за енергия: изменението $W'' - W'$ на енергията на една система при преход между две нейни състояния е равно на работата A на външните сили при този преход:

$$(2.2) \quad W'' - W' = A.$$

(Следва да се помни, че за да бъде системата статична, на всеки етап от промяната на състоянието ѝ външната сила, която действа на всеки заряд трябва да се уравни със съответната вътрешна електрична сила. Това означава, че по големината работите на външните и на вътрешните сили ще бъдат равни, а знаците им – противоположни.)

2. Ако приемем, че енергията е нула, когато частите на системата са безкрайно далече една от друга и не си взаимодействат, (2.2) следва, че енергията W на една система е равна на работата на външните сили при създаването ѝ, т.е. при събиране нейните части от безкрайност (тъй като в началното състояние $W' = 0$):

$$(2.3) \quad W = A.$$

3. От закона на Кулон, от принципа за суперпозиция и от определението за интензитет на полето следва, че ако при фиксирано положение на зарядите увеличим (или намалим) всеки от тях n пъти, в същата пропорция се променя и интензитетът на полето във всяка точка на пространството, т.е. във всяка точка от пространството:

$$(2.4) \quad E_n = nE_1.$$

4. От закона на Кулон следва, че ако всички заряди в една система едновременно сменят знаците си, електричните сили, с които те си взаимодействат не се променят (нито по големина, нито по посока), т.е.:

$$(2.5) \quad F_1 = F_{-1},$$

където F_1 е електричната сила, която действа на един заряд от K_1 , а F_{-1} – съответната сила в K_{-1} .

От тези четири предпоставки непосредствено се извеждат две следствия. **Първото** може да се извлече от (2.3) и (2.5) гласи, че енергиите на K_1 и K_{-1} са равни:

$$(2.6) \quad W_1 = W_{-1}.$$

Наистина, щом при смяна на знаците на зарядите вътрешните сили в системата не се променят (четвърта предпоставка), няма да се променят и външните сили, които във всеки момент ги уравниват и следователно работата на последните при създаване на K_1 е равна на работата им при създаване на K_{-1} . При това положение втората предпоставка гарантира изпълнението на (2.6).

Второ следствие се получава чрез разглеждане системата, състояща се от K_1 и K_{-1} , но в специалния случай, когато K_{-1} е безкрайно далече от K_1 . В този случай двете системи не взаимодействат и началната енергия W на общата система е сбор от енергиите на K_1 и K_{-1} . По силата на (2.6) за W получаваме:

$$(2.7) \quad W = W_1 + W_{-1} = 2W_1.$$

Да разглеждаме процеса, при който K_{-1} , тръгвайки от безкрайност, се съвместява с K_1 . Съгласно казаното по-горе, в края на този процес поле няма и следователно енергията на крайното състояние е

$$(2.8) \quad W'' = 0.$$

От (2.2), (2.7) и (2.8) получаваме **трето следствие**: работата на външните сили при процеса на съвместяване на K_1 и K_{-1} е:

$$(2.9) \quad A = -2W_1.$$

Накрая, да разгледаме система, състояща се от две еднакви системи от типа K_1 , намиращи се безкрайно далече една от друга. По силата на (2.6) енергията на това начално състояние отново се описва с (2.7). Ако преместим едната от системите K_1 от безкрайност до съвместяването ѝ с другата, получаваме тъкмо системата K_2 и следователно енергията на крайното състояние е

$$(2.10) \quad W'' = W_2.$$

Тъй като силите, с които си взаимодействат K_1 и K_1 са равни по големина и противоположни по посока на силите, с които си взаимодействат K_1 и K_{-1} , при този процес електричните сили извършват същата по големина, но с обратен знак работа, както при разглежданото по-горе сближаване на K_1 и K_{-1} . Тогава от (2.2), (2.7), (2.9) и (2.10) следва:

$$(2.11) \quad W_2 = W' + (-A) = 2W_1 + 2W_1 = 4W_1.$$

По подобен начин може да се разгледа система, съставена от безкрайно отдалечени системи K_2 и K_1 , чиято енергия в това начално състояние, по силата на (2.11) е:

$$(2.12) \quad W' = W_2 + W_1 = 5W_1.$$

Ако преместим K_1 до съвместяването ѝ с K_2 , получаваме система K_3 с енергия W_3 , в която зарядите са равни на утроените заряди на K_1 . При това преместване, по силата на (2.4), върху всеки от зарядите на K_1 ще действа сила, два пъти по-голяма и обратна по посока спрямо съответната сила, действаща в случая, когато K_1 се доближаваше до K_1 . Следователно и работата сега ще бъде два пъти по-голяма от (2.9), т.е. $-4W_1$. По такъв начин отново, както в предишния случай, от (2.2) следва:

$$(2.13) \quad W_3 = 5W_1 + 4W_1 = 9W_1.$$

И така, двукратно увеличение на зарядите води до учетворяване на енергията на полето, утрояването им – до деветкратно увеличение на енергията.

По-нататък може да се приложи методът на математическата индукция: допускате, че е доказано равенството

$$(2.14) \quad W_{n-1} = (n-1)^2 W_1.$$

Разглеждаме системата, състояща се от K_{n-1} и K_1 , в началото безкрайно раздалечени, така че началната ѝ енергия е

$$(2.15) \quad W' = W_{n-1} + W_1.$$

При преместване на K_1 от безкрайност до съвместяването ѝ с K_{n-1} , на всеки заряд от K_1 действа сила, $(n-1)$ пъти по-голяма и обратна по посока спрямо силата, която му действа, когато K_1 се приближава до K_1 и следователно (вж.(2.9)) работата на външните сили в случая ще бъде:

$$(2.16) \quad A = 2(n-1)W_1.$$

Тъй като в края на преместването се получава система K_n , енергията на крайното състояние е:

$$(2.17) \quad W^n = W_n,$$

и от (2.2), (2.14), (2.15), (2.16) и (2.17) получаваме:

$$W_n = W_{n-1} + W_1 + A = [(n-1)^2 + 1 + 2(n-1)]W_1,$$

Или:

$$(2.18) \quad W_n = n^2 W_1.$$

И така, когато зарядите се увеличат n -пъти, енергията на системата се увеличава n^2 пъти. Но по силата на третото твърдение n -кратно изменение на зарядите е свързано със също n -кратно изменение на интензитета на полето във всяка точка.

Следователно, наистина за произволна система от статични заряди връзката между енергията на полето и неговия интензитет е квадратична, т.е. видът на търсената функция F (вж. формула (2.1)), е:

$$(2.19) \quad F(E) = \alpha E^2,$$

където α е коефициент, който не зависи от полето. Разбира се, за определяне неговата стойност е необходимо да се привлече нова физична информация.

Едно сравнение на получения резултат с този, до който се достига по традиционния метод (чрез разглеждане процеса на зареждане на плосък кондензатор) илюстрира познатата зависимост: с по-малко ограничителни предположения и с по-малко информация на входа на изхода се получава резултат с по-голяма общност (получената зависимост е валидна за произволна система от заряди), но за сметка на тази общност резултатът е по-слаб – (в случая остана неопределен коефициент на пропорционалност.)

От гледна точка на учебно съдържание направените разглеждания по своята трудност очевидно принадлежат към третата от разгледаните в началото на главата група знания. Въпреки полуколичествения характер на резултата, те могат да се използват от групи или отделни ученици, тъй като представляват отлична илюстрация за **силата на общите подходи** – по същество тук не се използва нищо освен закона на Кулон, определенията за енергия и за интензитет, както и принципа на суперпозицията. Освен това характерът на доказателството (липсата на сложен математически апарат) показва, че дори само неговото разглеждане би спомогнало за развиване способността на учениците да правят логически заключения (приучва към ясно разграничаване на предпоставките и използване на правилата на логиката за извличане на следствия).

2.3. Фундаменталният експериментален закон на електростатиката

Както бе посочено, цялата електростатика се гради върху един фундаментален експериментален закон – закона на Кулон. Неговото присъствие в общозадължителния минимум е осигурено, но относително малкото място, което му се отделя, не дава възможност да се обърне внимание на няколко важни от *методологична* гледна точка негови страни, на които следва да се обърне внимание при разглеждане на електростатиката в часовете за незадължителна подготовка.

Първият съществен момент, който се пропуска в общозадължителния минимум от знания се отнася до факта, че **законът на Кулон не установява зависимостта на електричната сила от зарядите на телата – той постулира тази зависимост**. По същество чрез закона на Кулон се въвежда физичната величина (не понятието!) електричен заряд. Затова е съществено в хода на задълбочаване на знанията по този въпрос да се покаже как чрез измерване на разстоянията и силите, с които си взаимодействат **три** заредени тела, може да се пресметнат техните заряди.

Ето защо принципно важно при разглеждане на закона на Кулон е да се разбере, че винаги ще стои въпросът с каква точност е установено, че силата е обратно пропорционална на **точно** втората степен на разстоянието между зарядите и тази точност с течение на времето все повече ще се увеличава, като в същото време нямаме

право да задаваме въпрос дали тази сила е точно право пропорционална на големините на зарядите – последната зависимост е изпълнена **по дефиниция** на величината заряд.

Втори пропуск, който се прави при изучаване на закона на Кулон в рамките на общозадължителния минимум, е свързан с провеждането на опитите на Кулон. Мястото на закона на Кулон в общата схема, както и общата тенденция към засилване на експерименталния подход за сметка на теоретичния налагат да се отдели повече внимание на измерванията, свързани с установяване на зависимостта на електричната сила от разстоянието между заредените тела. Основен недостатък на традиционните изложения на опитите на Кулон¹² е следният: те създават погрешното впечатление, че с едно отчитане по една скала се измерват две величини – и разстоянието между зарядите, и тегълът на усукване на нишката в Кулоновата везна. Затова в систематичния курс е необходимо да се обърне повече внимание и на устройството на везната (на наличието на втора скала), и на методиката на измерванията.

На трето място, при задълбочаване на знанията за закона на Кулон следва да се обърне внимание на още един факт с принципно значение. Става дума за това, че този закон дава израз за силата, с която едно заредено тяло (активният участник във взаимодействието, източникът на силата) действа на друго заредено тяло (пасивният участник във взаимодействието, тялото, върху което е приложена силата). Опитите на Кулон установяват, че характеристиката на активния участник – неговият заряд Q' , и характеристиката на пасивния участник – зарядът му Q , участват симетрично в израза за резултата от взаимодействието – електричната сила. Именно този факт, на който обикновено не се обърща внимание, гарантира, че **за характеризирание способността на едно тяло да участва в електромагнитните взаимодействия и в активно, и в пасивно отношение е достатъчна една единствена величина – зарядът на тялото.**

2.4. Основните закони на електростатиката

Основните закони на електростатиката са два: твърдението за консервативността на електростатичните сили и теоремата на Гаус. Те представляват преки теоретични следствия от фундаменталния експериментален закон на Кулон, и, обратно – самият закон на Кулон може да се изведе от двата основни закона (но не и от единия от тях, взет отделно!). Разбира се, математичният апарат, който е на разположение в училище, не позволява тези следствия да бъдат доказани в общия им вид.

2.4.1. За взаимоотношението закон на Кулон – теорема на Гаус

В 1. бе очертан общият път, който обикновено се следва при излагане на теоремата на Гаус в училищните курсове. В тях, обаче, обикновено остава неразкрито взаимоотношението закон на Кулон – теорема на Гаус, което представлява въпрос с методологично значение, на който може да се обърне внимание в систематичния курс, т.е. при второто равнище на изучаване на електродинамиката. Става въпрос за това, кое от двете твърдения е по-общо.

Често се твърди, че теоремата на Гаус е по-обща от закона на Кулон. Това твърдение може да се приеме само в смисъл, че докато законът на Кулон е валиден само за взаимодействието на два точкови заряда, теоремата на Гаус е валидна при произволни източници на полето (точкови, линейни, повърхнинни и обемни заряди). Това обаче е едната страна на въпроса и то не най-важната. Ако за общността на едно твърдение се съди по съвкупността на проблемите, чието решение то дава, тогава несъмнено законът на Кулон е по-общ. (Разбира се, трябва да се подразбира, че при решаване на даден проблем, освен едно от двете твърдения, се използват и всички

¹² Попов, Хр. *Две бележки по урока "Закон на Кулон"*, Математика и физика, 1974, 4,.

познати седем свойства на електричните заряди.) До същия извод се стига и ако просто се отчете казаното по-горе, че теоремата на Гаус следва от закона на Кулон, докато обратното не е вярно. (Авторите, които "извеждат" закона на Кулон от теоремата на Гаус, прилагайки я за случая на точков заряд, неизбежно използват като известна картината на силовите линии на полето на заряда, което означава, че, без да заявяват това открито, използват и другия основен закон на полето – за консервативността му.)

Взаимоотношението закон на Кулон – теорема на Гаус допуска коментар и в едно неочаквано направление, което може да се окаже интересно предизвикателство към интелекта на онези ученици, по силите на които са знанията от третата група (съгласно казаното в началото). Идеята за подобно разглеждане бе разработена в¹³ и по същество може да се илюстрира със следния пример, за разбирането на който е достатъчен геометричният наглед за електричния поток като величина, пропорционална на броя на силовите линии, пресичащи една повърхнина.

Да си представим една област V с ориентирана навън повърхност S . Според теоремата на Гаус потокът на електричното поле през S е $\frac{Q}{\epsilon_0}$, където Q е затвореният

във V заряд. Въпросът, обаче, какво всъщност "затваря" една повърхност, често няма еднозначен отговор (особено ако части от повърхността са неограничени). Със същия успех бихме могли да смятаме, например, че повърхността, която съвпада с S , но има обратна ориентация, загражда пространството извън V . Смяната на ориентацията, обаче, води до смяна на знака на електричния поток и тогава трябва да заключим, че извън V има заряд точно $-Q$. С други думи, общият заряд, съдържащ се в цялото пространство, трябва да бъде нула, т.е. Вселената трябва да бъде електронеутрална.

Геометричният смисъл на направеното заключение е ясен – то показва, че "в краищата" си силовите линии, които отиват до безкрайност, трябва завършват (или започват) там от заряди с подходяща големина, така че общият заряд на Вселената да бъде нула.

По такъв начин се достига до една неочаквана връзка между закона на Кулон (от който следва теоремата на Гаус) и състоянието на Вселената в момента на Големия взрив – законът на Кулон може да бъде верен само, ако в момента на Големия взрив Вселената е била електронеутрална.

Тези разсъждения нямат само абстрактно-умозрително значение. Както е показано в¹³, с тяхна помощ може да се реши един парадокс, според който от суперпозицията на две еднопосочни полета с интензитет E се получава не поле с интензитет $2E$, а отново поле с интензитет E .

2.4.2. Срещу едно псевдодоказателство

Докато пътят, по който се доказва теоремата на Гаус, може да се илюстрира с един съдържателен пример, като се използва директно следващият от закона на Кулон израз за интензитет на полето на точков заряд, във връзка с другия основен закон, установяващ консервативността на електростатичното поле, подобен пример не може да се посочи. Могат да се посочат примери, от които е очевидно, че в някои частни случаи работата на електричната сила по затворен контур е нула, но те са толкова тривиални, че не подсказват по никакъв начин общовалидността на закона. Поради това неизбежно в повечето случаи се остава на равнището, което се достига в общозадължителната подготовка: като единствено доказателство, че електростатичното поле няма затворени силови линии остава опитно демонстрираният факт, че онагледените електрични силови линии винаги свързват заредени тела.

¹³ Попов Хр. *Какво ни говори теоремата на Гаус - Остроградски, гледана "наотъки"*, Физика, 1981, 2.

В някои учебници, обаче, консервативността на електростатичните сили се "доказва" за частния случай на хомогенно поле. (Още по-често подобно "доказателство" се среща за гравитационното поле.) В тези случаи, за да се пресметне работата по крива с произволна форма, кривата се апроксимира с начупена линия, състояща се от участъци, съответно успоредни и перпендикулярни на полето. Пресмятането на работата по начупената линия е лесно, а след това полученият резултат се пренася и за самата крива със съображението, че когато броят на чупките расте неограничено, точките от двете линии стават безкрайно близки.

Порочността на това разглеждане бе анализирана в¹⁴. Там бе показано, че с подобно разсъждение може да се "докаже", че сбора от дължините на катетите в правоъгълния триъгълник и равен на дължината на хипотенузата. Наистина, лесно е да се построи редица от начупени линии с нарастващ брой чупки, чиито дължини са равни на сумата от дължините на двата катета, а точките на които се приближават неограничено близко до точките на хипотенузата.

Поради тази причина в¹⁴ изказахме и поддържаме съмненията си в целесъобразността от използването на подобни разсъждения. Една очевидна опасност от тяхното прилагане е привикване към безкритичност и приемане на "очевидните" неща за безусловно верни.

3. Знанията за стационарните магнитни взаимодействия като физична теория

Стационарните магнитни взаимодействия, т.е. взаимодействията на постоянни токове посредством магнитни сили, образуват втория раздел от електродинамиката, знанията от който могат да се структурират във вид на самостоятелна физична теория. Основна е идеята за еднотипност в изграждането на електростатиката и на теорията на стационарните магнитни явления.

Подобно на електростатиката, и в тази теория фундаменталното явление е едно – наличието на магнитни сили, с които си взаимодействат стационарните токове. Фундаменталните понятия са две – понятието ток и понятието магнитно поле. Токът обаче е фундаментално понятие само в рамките на тази по-тясна теория, като в рамките на по-широката теория – електродинамиката, губи това си качество. Там той се определя чрез взетото от механиката понятие движение и понятието електричен заряд. Изясняването на това обстоятелство в хода на изучаването на стационарните явления спомага за разбиране и затвърдяване на относителния характер на фундаменталността на едно понятие въобще.

Съществуват различни възможности за въвеждане на второто фундаментално понятие – понятието магнитно поле и неговата характеристика – магнитната индукция. В методическата литература се среща мнението, че най-съвременен и издържан от методическа гледна точка е релативистичният подход към магнитните взаимодействия. Негов основен и непреодолим в нашето училище недостатък е необходимостта от предварително изграждане на определени релативистични представи.

Изхождайки от необходимостта да се търси максимална аналогия с електростатиката, в учебника⁴ концепцията за магнитното поле се въвежда с помощта на втория фундаментален експериментален закон – закона на Ампер.

3.1. Фундаментален експериментален закон на стационарното магнитно поле

На единственото фундаментално явление съответства и единствен фундаментален експериментален закон – законът на Ампер за магнитната сила, с която

¹⁴ Попов Хр. *Целесъобразно ли е?*, Физика, 5, 1990.

си взаимодействат два постоянни тока (във формата на Грасман: ако по два затворени контура текат постоянни токове J и J' , магнитната сила, с която токът J' , течащ по активния линеен елемент $\Delta l'$ от единия контур, действа върху пасивния линеен елемент Δl от другия контур, се дава с израза:

$$(3.1) \quad \Delta^2 F_m = \frac{\mu_0}{4\pi} J J' \frac{\Delta \vec{l} \times (\Delta \vec{l}' \times \vec{r}_0)}{r^2},$$

където r е разстоянието между $\Delta l'$ и Δl , а \vec{r}_0 – единичният вектор от активния към пасивния линеен елемент.

Очевидно е, че поради недостатъчен математически апарат в училище (не се изучава векторно произведение на вектори), не е възможно запознаването със закона на Ампер във вида (3.1). Поставянето на (3.1) в основата на теорията на стационарното магнитно поле би било идеалният случай, тъй като е очевидна аналогията между формата на (3.1) и формата на закона на Кулон. На тази основа теорията на магнитните взаимодействия би била точен идеен аналог на електростатиката. Именно за да остане все пак тази аналогия, при изучаване на електродинамиката на второ равнище, в учебника⁴ излагаме основите на електростатиката на основата на две експериментални формули:

– дефиниционната за интензитет на електричното поле формула:

$$(3.2) \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q}$$

– и формулата за интензитет на полето на полето на точков заряд:

$$(3.3) \quad \vec{E} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}_0,$$

които са преки следствия от закона на Кулон.

По същия начин законът на Ампер (3.1) може да се факторизира и от него да се получат две формули:

– дефиниция на магнитната индукция на полето, създадено от тока J' по линейния елемент $\Delta l'$ в точка, отстояща от него на разстояние r в посока на единичния вектор \vec{r}_0 :

$$(3.4) \quad \Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} J' \frac{\Delta l' \times \vec{r}_0}{r^2};$$

– формула за магнитната сила, с която магнитно поле с известна индукция \vec{B} действа върху ток J , течащ по линеен елемент $\Delta \vec{l}$:

$$(3.5) \quad \Delta \vec{F}_m = J \Delta \vec{l} \times \vec{B}.$$

Снемането на тези формули до равнището на преподаването в училище, се осъществява, като се вземат модулите от левите и десните им страни:

$$(3.6) \quad \Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{J' \Delta l'}{r^2} \sin \varphi$$

$$(3.7) \quad \Delta F_m = J \Delta l B \sin \alpha,$$

където α е ъгълът между \vec{B} и $\Delta \vec{F}_m$, а φ – ъгълът между \vec{r}_0 и $\Delta \vec{l}'$. Първата от тези формули (т.е.(3.6)) в училище се изучава под названието *закон на Био – Савар*, а втората – като *закон на Ампер*. Разбира се, всеки от тези закони се придружава от съответно мнемонично правило, чрез което с помощта на пръстите на дясната ръка се определя посоката на $\Delta \vec{B}$ или на $\Delta \vec{F}$.

Едва в преговорно-обобщителния урок по темата двете формули може да се обединят в една (както в учебника⁴):

$$(3.8) \quad \Delta^2 F_m = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} JJ' \Delta l \Delta l' \sin \alpha \sin \varphi .$$

Тогава може да се възстанови и "историческата истина", т.е. да се назове това равенство закон на Ампер за магнитната сила и да се обърне внимание върху аналогията между него и закона на Кулон. За съжаление, между изучаването на двата закона съществува и една съществена разлика: докато за закона на Кулон ние можем точно да укажем какви процедури и измервания е правил Кулон, за да достигне до количествените закономерности, съдържащи се в съответната формула, по отношение на закона на Ампер това е невъзможно – не само поради сложността на опитите, но и поради това, че самият Ампер дава резултатите си в готов вид (и то не в този, в който ги използваме).

Две са обстоятелствата, върху които се обърща внимание при изучаване на закона на Ампер за магнитната сила:

1. Първото от тях е свързано с ролята на този закон за определението на величината електричен ток. Така както законът на Кулон дава възможност да се дефинира величината електричен заряд, така и законът на Ампер дава по принцип възможност чрез измерване на познати величини (сили, разстояния, ъгли) да пресмятаме тока по даден контур. Този въпрос е принципен, защото става дума за величина, която характеризира едно от фундаменталните понятия на теорията – понятието ток. Разбира се, измервателните процедури в случая са значително по-сложни поради векторния характер на източника на полето (токов елемент) и векторната връзка между магнитната индукция и магнитната сила.

2. Както в електростатиката формула (3.3) заедно с принципа на суперпозицията позволяват да се пресметне интензитетът на полето на произволна система от заряди, така и сега формула (3.6) и принципът на суперпозицията позволяват да се пресметне магнитната индукция на полето на произволна система от постоянни токове, а оттам – и да се получат основните закони на полето. От (3.6) директно следва, обаче, и един много важен извод, на който обикновено не се обърща достатъчно внимание: че независимо от формата на проводника, по който тече ток J , индукцията B на полето във всяка точка на пространството е право пропорционална на J . Този извод е от значение при разглеждане поле на намотка, енергията на полето и т.н.

3.1.1. Сравнение между магнитните и електричните сили

Формула (3.8) позволява да се направи едно сравнение между магнитните и електричните сили, при което се разкрива принципно важният факт, че наличието на магнитни сили са само един релативистичен ефект. (Дори при положение, че в систематичния курс се разглеждат основите на специалната теория на относителността, това не може да се направи достатъчно задълбочено, така че чрез нея да се достигне до подобен важен извод.)

За целта е необходимо да се въведат плътностите g и g' на зарядите върху двата контура L и L' , по които текат токовете J и J' . С други думи g е количеството заряд на единица дължина от L , а g' – съответно върху L' . Тогава, ако с v и v' означим проекциите на скоростите на движение на зарядите върху допирателните към двете криви, токовете могат да се изразят чрез тези скорости:

$$J = gv \quad \text{и} \quad J' = g'v'.$$

Като заместим тези изрази за J и J' в (3.8) и отчетем, че $g\Delta l = \Delta q$ и $g'\Delta l' = \Delta q'$ са точно зарядите, разположени върху линейните елементи Δl и $\Delta l'$, изразът за магнитната сила придобива вид:

$$(3.8'') \quad \Delta^2 F_m = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} vv' \Delta q \Delta q' \sin \alpha \sin \varphi .$$

Ако отчем още, че двата синуса не надминават единица и разделим (3.8') с израза, който законът на Кулон дава за електричната сила $\Delta^2 F_e$ на взаимодействие между същите заряди, се получава:

$$\frac{\Delta^2 F_m}{\Delta^2 F_e} \leq \epsilon_0 \mu_0 v v' = \frac{v v'}{c^2},$$

като в последното равенство е отчетена формулата на Максвел $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$.

Полученият резултат показва, че когато скоростите на движение на зарядите са малки спрямо скоростта на светлината във вакуум, магнитните сили са пренебрежимо малки спрямо електричните – факт, който изразяваме с думите, че магнитните сили представляват един релативистичен ефект.

Същият резултат обаче е повод и за следното важно за практиката разглеждане. Известно е, че дрейфовите скорости на свободните електрони в металните проводници като правило са по-малки от 10^{-3} m/s, докато скоростта на светлината има огромната стойност $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. С тези числа за отношението между магнитната и електричната сила се получава стойност под 10^{-22} , която е далеч по-малка от относителната грешка, характерна и за най-точните физични експерименти. Това заключение видимо противоречи на факта, че, първо, магнитните сили се наблюдават относително лесно и, второ, че в практиката (електромотори и др.п.) използваме предимно тях, а не електричните.

Обяснението на това противоречие се получава при отчитане на следните две обстоятелства:

– във всяко тяло при обикновени условия положителните и отрицателните електрични заряди са така добре компенсирани на микроравнище, че електрични сили на взаимодействие между телата не се наблюдават;

– когато по един проводник протича ток, в него се движи насочено огромен брой свободни заряди (от порядък на числото на Авогадро), така че сумирането на огромен брой безкрайно малки величини води до краен ефект – наблюдаваните магнитни сили.

Направеното сравнение между порядъците на електричните и магнитните сили се отнася към знанията от трети тип, но то е важно, защото спомага за развиване както на способността за правене количествени оценки, така и на физичната интуиция. То може да се използва и при разработване на обобщителната тема за стационарно магнитно поле.

3.1.2. Извод на формулата за индукция на полето на ток по безкраен прав проводник

В учебната литература се срещат няколко примера за прилагане на закона на Био - Савар (3,6) и принципът на суперпозицията, в които се пресмята индукцията на поле, създадено от постоянен ток, течащ по проводник с определена форма. Невъзможността да се използва операцията интегриране силно ограничава възможностите в това отношение: ограничава както формата на проводниците, така и разположението на точките в пространството, за които индукцията може да се намери с елементарни математически средства. Така например обикновено се пресмята полето в точките от оста на кръгов ток, т.е. ток, който тече по окръжност.

Както ще стане ясно по-долу, от особено значение е намирането големината B на индукцията на полето в точки, намиращи се на произволно разстояние r от ток J , който тече по безкраен прав проводник. Формулата, която описва B в този случай, е необходима, за да се конструира поне един съдържателен пример, илюстриращ първия основен закон на стационарното магнитно поле. Същевременно тя има и практическо значение, защото лежи в основата на определението за една от основните единици на SI

– единицата за електричен ток. Поради това в учебната литература, в която не се извежда, в частност – във всички наши досегашни учебници за средното училище, тя се привежда наготово. От това, разбира се, губи както логичността, така и пълнотата на изложението.

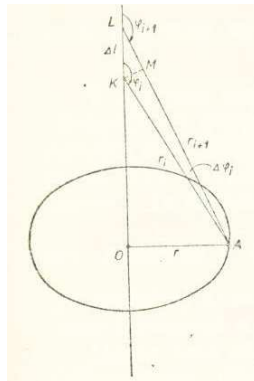
За целите, които си поставя един систематичен курс е желателно тази формула да бъде изведена, разбира се – без използване методите на интегралното смятане. За целта в такива случаи се прибегва до една процедура, която по принцип може да се приложи винаги, когато става дума за пресмятане на определен интеграл от някаква функция f . Интеграционният интервал се разделя на голям брой подинтервали, а стойността на подинтегралната функция във всеки от тях чрез подходящи математически преобразования се представя като разлика от два члена от вида:

$$f_n \Delta x_n = F_n - F_{n-1}.$$

Очевидно е при това, че в резултат на сумирането по всички подинтервали междинните стойности на F_n взаимно се унищожават, като остава само разликата между крайната и началната стойности. В нашата учебна литература, например, този прием бе приложен¹⁵ за пресмятане потенциала на полето на точков заряд.

Въпреки че по принцип методът е приложим във всички случаи, за нуждите в училище е важно дали F_n може да се изрази чрез елементарни функции. Оттук нататък различните разработки могат да се различават само по избора на интеграционния параметър, защото неговият подходящ избор може съществено да опрости извода.

Един конкретен начин за пресмятане индукцията на ток по прав проводник предложихме в¹⁶ (129). Там безкрайният проводник се разделя на подчастъци с еднаква дължина Δl , която е много по-малка от разстоянието r до т. A , в която се търси индукцията на полето. След съответните разсъждения за посоката на индукциите ΔB_n , създадени от отделните елементи, с помощта на закона на Био – Савар изразът за ΔB_n се представя във вида:



Фиг. 2.

$$\Delta B_n = \frac{\mu_0}{4\pi} J \Delta l \frac{\sin \varphi_n}{r_n^2},$$

където смисълът на φ_n и r_n се вижда от фиг. 2. Оттук нататък започва проблемът с избора на интеграционния параметър. Сумирането се извършва удобно, когато за

¹⁵ Борисов М. и др. *Физика за 10. клас на общообразователните трудово-политехнически училища*, С., Народна Просвета, 1972.

¹⁶ Попов Хр. *Една възможност за извеждане на формулата за индукцията на магнитното поле на постоянен ток по безкраен прав проводник*, Физика, 1, 1982.

параметър се избере ъгълът φ . Като се отчете, че $\Delta l \approx \frac{r_n \Delta \varphi_n}{\sin \varphi_n}$, а $r_n \sin \varphi_n = r$, на израза за

ΔB_n може да се предаде вид:

$$\Delta B_n = \frac{\mu_0 J}{4\pi r} \Delta \varphi_n \sin \varphi_n.$$

Оттук нататък проблемът е как изразът $\Delta \varphi_n \sin \varphi_n$ да се представи като разлика от типа $F_n - F_{n-1}$. В¹⁶ са указани различни варианти (в зависимост от математическата подготовка на учениците) на доказателството, че

$$\Delta \varphi_n \sin \varphi_n = \cos \varphi_n - \cos \varphi_{n+1}.$$

Като се отчете, че горната и долната половина на проводника имат еднакъв принос към индукцията в т. A , сумирането може да се проведе от $\varphi_1 = \pi/2$ до $\varphi_\infty = 0$. Удвоеният резултат дава точно търсената формула:

$$(3.9) \quad B = \frac{\mu_0 J}{2\pi r}.$$

Разбира се, посоченият извод може да се разглежда само като знание от трети вид в смисъла, дискутиран в началото. Това означава, че към него могат да бъдат насочвани само отделни ученици, показали вече вкус към подобен род разглеждания.

3.2. Основни закони на стационарното магнитно поле

По отношение на двата основни закона на стационарното магнитно поле и взаимоотношението им с фундаменталния експериментален закон – закона на Ампер, са валидни съображения, аналогични на изказаните преди за взаимоотношението закон на Кулон – теорема на Гаус. И тук в методическата литература се срещат твърдения за еквивалентност между закона на Ампер за магнитната сила, с която си взаимодействат два токови контура и закона на Ампер за тока, т.е. – закона за циркулацията на магнитното поле. Затова при структурирането на знанията за стационарните магнитни взаимодействия трябва да се има предвид по-общия характер на закона на Ампер за силата. Както и в случая на електростатиката, и тук фундаменталният експериментален закон е еквивалентен на двата основни закона (а не на единия от тях).

3.2.1. Закон за потока на магнитната индукция през затворена повърхност

Аналогията между електростатиката и теорията на стационарните магнитни взаимодействия продължава и при извода на основните закони на съответното поле. Както в електростатиката е невъзможно да се намери съдържателен частен случай, който да илюстрира факта, че циркулацията Γ_E на електричното поле по всяка затворена крива е нула, така тук е невъзможно да се намери подходящ нетривиален пример, чрез който да се илюстрира, че потокът Φ_B на магнитната индукция през всяка затворена повърхнина е нула. Затова и сега като единствена обосновка на основния закон $\Phi_B = 0$ остава опитно лесно демонстрираният факт, че онагледените магнитни индукционни линии на полетата на токове по проводници с относително проста форма (прав проводник, навивка, намотка и пр.) са затворени криви и следователно, ако пробождат дадена затворена повърхност, колкото пъти я пробождат от лицевата към опъката, толкова пъти я пробождат и в обратна посока (за да могат да се затворят), т.е. потокът на индукцията през повърхността е наистина нула.

По такъв начин обосновката на втория основен закон на стационарното магнитно поле се обвързва тясно с неговото геометрично тълкуване. Физичният смисъл на този закон бе обсъждан достатъчно подробно по-рано.

3.2.2. Закон за циркулацията на магнитната индукция по затворена крива

След като разполагаме с формула (3.9) за големината на индукцията на полето на ток по безкраен прав проводник, не е трудно да се приведе съдържателен пример, който илюстрира втория основен закон на стационарното магнитно поле – закона на Ампер за тока. Тъй като от (3.9) следва, че проекцията на \vec{B} върху тангентата на една индукционна линия е постоянна, пресмятането на циркулацията Γ_B на индукцията по една окръжност с център върху проводника и равнина, перпендикулярна на него, е равна на произведението от тази проекция и дължината $2\pi r$ на тази окръжност. Така за търсената циркулация се получава:

$$(3.10) \quad \Gamma_B = \mu_0 J.$$

Съгласно с логиката на разсъжденията, изложени в началото, този резултат се провъзгласява за общовалиден, т.е. независещ нито от формата на кривата L , по която се пресмята циркулацията, нито от формата и броя на проводниците, по които текат токове. Разбира се, тук трябва да се положат усилия за изясняване смисъла на дясната страна на (3.10) като *алгебрична* сума от токовете, обхванати от кривата L , т.е. като величина, която може да взема както положителни, така и отрицателни стойности.

Според изложената в началото скала за категоризация на знанията, този подход спада към втората от споменатите там групи. Наистина той се прилага в много учебници – и наши, и чужди, въпреки че в болшинството от тях формулата (3.9) не се извежда, а се използва наготово, представена или като резултат от опита, или като резултат от не приведени пресмятания.

Един въпрос, който може да се отнесе към третата от споменатите групи, е въпросът за смисъла на понятието *ток, обхванат от дадена крива L*. Проблемът идва от това, че по начало величината електричен ток се дефинира като количество заряд, което за единица време преминава през дадена повърхност. Една затворена крива обаче не определя по единствен начин повърхност – съществуват безкрайно много повърхности с един и същи контур. Това повдига въпроса дали ако пресмятаме "тока, обхванат от крива L" като заряд, преминал през различни от тези повърхнини, няма да се получат и различни стойности. Този въпрос бе поставен в¹⁷. Там бе отбелязано, че две обстоятелства гарантират независимостта на пресметнатия ток от избора на повърхността, чиито контур е разглежданата крива L :

- законът за запазване на електричния заряд;
- стационарността на полето.

Наистина, ако разгледаме областта, заградена между две повърхности, имащи един и същи контур L , стационарността на полето изисква затвореният в тази област заряд да не се променя с времето. И тъй като според закона за запазване на заряда зарядите не могат нито да изчезват, нито да се създават (освен по двойки с еднаква големина и противоположни знаци), колкото заряди влизат в областта за единица време през едната повърхност, точно толкова трябва да я напуснат през другата, което означава всъщност, че токовете през двете повърхности са еднакви.

3.3. Енергия на магнитното поле

Въпросът за намиране на израз за плътността на енергията на магнитното поле намира място в почти всеки учебник, който е на равнището, на което би трябвало да се намира нашият системен курс по физика.

Известно е¹⁸, че между въпроса за намиране изрази за енергията на електричното и за енергията на магнитното поле, съществува принципна разлика – докато в първия случай разглежданията могат да се ограничат в рамките на електростатиката, във

¹⁷ Попов Хр. *Ток на отместване*, Физика, 1, 1985.

¹⁸ Попов Хр. *Извод на формулата $w_m = B^2/2\mu_0$* , Физика, 1, 1990.

втория трябва да се излезе извън рамките на теорията на стационарното магнитно поле и да се използва законът на Фарадей за електромагнитната индукция. Наистина, коректната постановка на въпроса за енергията, с която си взаимодействат например два неподвижни контура, по които текат постоянни токове, изисква да се пресметне работата на вътрешните сили при пренасяне на единия от контурите в безкрайност. За разлика от електростатиката, където вътрешната сила е една – електричната, в случая действат три вътрешни сили: магнитната сила, с която полето на неподвижния контур действа върху подвижния, индуцираната електродвижеща сила в подвижния контур, която е резултат от преместването му и, накрая, вихровата електрична сила, която действа върху зарядите на неподвижния контур и се появява вследствие промените на магнитното поле на подвижния контур. Сумирането на работите на тези три сили се улеснява от факта, че сбора на първите две е нула. Въпреки, че той може да се илюстрира чрез подходящ частен случай в рамките на учебното съдържание¹⁹, в достъпната училищна литература не съществува пример за последователно провеждане на този подход за пресмятане на енергията със средствата, използвани в училище.

Поради посочената трудност обикновено израз за енергията на магнитното поле се получава чрез пресмятане работата на източник на постоянно ЕДН при затваряне на веригата му с намотка, или на самоиндуцираните в намотката сили при прекъсване на веригата.

Пълното разглеждане на процеса на възникване на ток в намотка при затваряне на верига с източник на постоянно ЕДН изисква използване на закона на Ом за затворена верига, в която има два източника – един постоянен и един – променлив. Тъй като това усложнява разглежданията, обикновено те се привеждат само за информация, а резултатът за енергията на магнитното поле ($LJ^2/2$) се обосновава чрез аналогията с израз за кинетична енергия на тяло ($mv^2/2$). Използването на закона на Ом за цялата верига може да се избегне, ако се разглежда идеална намотка, но в този случай възникват трудности с обосноваване на знака на работата. Поради тази причина често направо се пресмята само големината на работата.

Въпросът със знака на работата намира по-лесно решение в случаите, когато се пресмята работата на самоиндуцираните в намотката сили при прекъсване на веригата. В този случай, обаче, става по-неявна връзката на работата на тези сили с енергията на полето, която по начало се определя от работата не на вътрешните, а на външните сили.

Във всички споменати дотук варианти, както и в случая на пресмятане енергията на зареден кондензатор, необходимото интегриране се извършва неявно – чрез геометрични съображения, като получаването на крайния резултат се свежда до оценяване площта на триъгълник, ограничен от графиката на потока на магнитното поле през една намотка като функция на тока през нея. Тъй като потокът на полето е все пак доста абстрактна величина, често разглежданията предварително се опростяват чрез допускането за линейно нарастване на тока във веригата – в този случай се разглежда по-близката до съзнанието на учениците графика на тока в зависимост от времето. (Най-опростеното разглеждане, разбира се, и в този случай може да използва аргумента, че поради промените на тока от 0 до J , в крайния резултат трябва да фигурира средната му стойност, т.е. $J/2$).

Поради посочените трудности, въпросът за енергия на магнитното поле дълго време не се поставя в учебните програми по физика за средното училище у нас и това съответства на равнището на обучението през последните десетилетия. Тази празнина, обаче, започна да се чувства особено осезателно когато се появи възможност за по-задълбочено изучаване на физиката във формите на свободноизбираемата и

¹⁹ Попов Хр. *Въпросът за работа на магнитните сили в новия учебник по физика в 9. клас*, Физика, 6, 1981.

факултативна подготовка. Характерна негова особеност е засилването на ролята на енергетичния подход при разглеждане на различни явления, а липсата на яснота по въпроса за енергията на магнитното поле явно затруднява разглеждането на такива процеси като разпространението на електромагнитно вълни, например. Именно това наложи в учебната програма по физика за 11. клас да бъде включен и този въпрос. Методическата разработка на въпроса и обосновката на избрания вариант са изложени в¹⁸.

Ръководно начало, следвано при избора измежду различните възможности, е развитата в началото идея за максимално използване на магнито–електричния паралелизъм. За реализацията на тази идея се налага предварително в учебното съдържание да се въведат и други нови елементи – пресмятане на индукцията вътре в дълга цилиндрична намотка ($B = \mu_0 n J$) и получаване формула за индуктивността на такава намотка ($L = \mu_0 n^2 V$). Същото съображение налага избора и на варианта с пресмятане на работата на източника на ЕДС при затваряне на веригата му с идеална намотка. По такъв начин, първо, се получава пълна аналогия с пресмятането на енергията на зареден кондензатор и, второ, се разграничават двата случая – общият случай, за който е валидна формулата за енергията на полето на произволна намотка ($W_m = LJ^2/2$) и частния случай, в който за дълга цилиндрична намотка се получава израз за плътността на магнитната енергия ($w_m = B^2/2\mu_0$).

Както бе посочено в¹⁸, първа стъпка към целта е решаването на една предварителна задача – намиране израз за индуктивността L на цилиндрична намотка с n навивки на единица дължина и обем V . Изводът, че

$$(3.11) \quad L = \mu_0 n^2 V$$

се опира на първия основен закон на стационарното магнитно поле и е както известен в методичната, така и използван в учебната литература. При решаването на тази задача като важен междинен резултат се получава и израз за индукцията на полето вътре в намотката:

$$(3.12) \quad B = \mu_0 n J,$$

където J е токът през намотката.

За пресмятане енергията на магнитното поле, когато по една идеална намотка (т.е. намотка с омово съпротивление $R = 0$) тече постоянен ток J , се разглеждат процесите, които протичат, когато в един начален момент $t = 0$ между краищата на намотката се подаде постоянно напрежение U . За да не протече безкрайно голям ток през намотката е необходимо напрежението между краищата ѝ U във всеки момент да бъде равно с обратен знак на самоиндуцираното в нея по закона на Фарадей напрежение, т.е.

$$(4.3,13) \quad U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

където Φ е потокът на магнитното поле през намотката. Ако моментната стойност на тока в интервала Δt е i , външните сили, т.е. източникът на напрежението U , за интервала време Δt ще извършат работа

$$\Delta A = iU\Delta t = i\Delta\Phi.$$

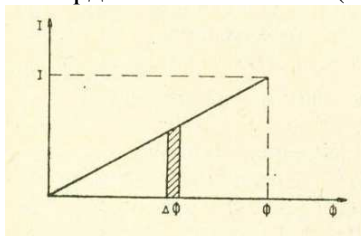
Тъй като единствен резултат от действието на тези сили е възникването на магнитно поле (поради $R = 0$ джаулева топлина не се отделя), от определението за енергия на система следва, че цялата работа ΔA на външните сили отива за увеличаване на енергията на полето, т.е.

$$\Delta W_m = i\Delta\Phi,$$

където W_m е енергията на магнитното поле. (Разбира се, тъкмо тук ние елиминираме другата възможност, предоставяна от принципа на далечното действие: със същото право бихме могли да считаме, че работата на външния източник увеличава не енер-

гията на полето, а примерно кинетичната енергия на движещите се заряди, т.е. да считаме, че енергията е не в полето, а в тока, в намотката.)

По-нататък следва най-същественният пункт в извода. В него се обръща внимание на факта, че съгласно формулата $\Phi = Li$, графиката на тока i като функция на потока Φ е права линия през началото на координатната система (вж.фиг. 3).



Фиг. 3.

От фигурата се вижда, че работата ΔA е равна точно на площта на заштрихованата ивица. Оттук следва, че когато токът в намотката е J , общата енергия на полето е равна на площта на триъгълника с основа Φ и височина J :

$$(3.14) \quad W_m = J\Phi/2.$$

Тъй като $\Phi = LJ$, от (3.14) следва важната формула

$$(3.15) \quad W_m = LJ^2/2.$$

Оттук нататък се следва пътят, очертан в първия параграф – от глобалната формула (3.15) трябва да се получи локална връзка, която не зависи от особеностите на разглеждания частен случай. За целта чрез (3.11) и (3.12) енергията се изразява чрез обема V на намотката, откъдето непосредствено следва, че енергията в единица обем, т.е. търсената плътност на магнитната енергия, се описва с формулата:

$$(3.16) \quad w_m = \mu_0 B^2/2.$$

От изложеното се вижда колко далече стига аналогията между електростатиката и теорията на стационарното магнитно поле.

3.3.1. Обща връзка между енергията и индукцията на магнитното поле

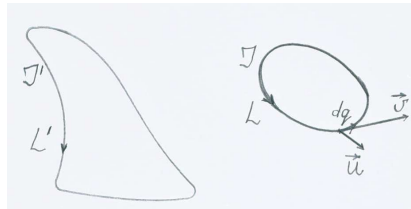
Изложените варианти за извеждане формула (3.16) удовлетворяват изискванията за достъпност на учебното съдържание, за което свидетелства и широкото им ползване. Те обаче страдат от недостатъка, че не се поддават на обобщение, тъй като за квадрата на магнитната индукция не е валиден принципът за суперпозицията. Поради това, както в случая за енергията на електричното поле, разгледан в 2.2, е интересно да се намери начин за доказване правата пропорционалност между енергията на магнитното поле и B^2 в общия случай на стационарно магнитно поле, т.е. поле, създадено от произволни стационарни токове. Подобно доказателство за пръв път е изложено схематично в¹¹ и по-пълно – в²⁰. Неговата разгърната версия е изложена по-долу.

Идеята на доказателството е трудностите при отчитане работата на трите вътрешни сили, които действат при разрушаване на една стационарна система (които трудности бяха упоменати по-горе), да бъдат елиминирани чрез разглеждане работата не на вътрешните, а на външните сили. Това е възможно по силата на две важни обстоятелства. Първо, целта, която си поставяме сега е значително по-тясна – търсим не *точен* израз за плътността на магнитната енергия, а само качествена връзка между енергията и индукцията на полето. Второ – както бе вече отбелязвано, в една стационарна система външната и вътрешната сили, които действат върху даден елемент на системата във всеки момент си правят равновесие, така че работата на всички

²⁰ Popov C. *Simple proof that energy stored in a magnetic field is proportional to the magnitude of the field induction squared*, Am.Jorn.of Phys., 62 (12), 1994.

вътрешни сили, действащи на елемента е равна по големина и обратна по знак на работата на външните сили.

Преди обсъждането на общия случай да разгледаме система, състояща се от два затворени контура: неподвижен контур L' с постоянен ток J' и бавно движещ се контур L с постоянен ток J (фиг. 4).



фиг. 4.

С \vec{B}' и \vec{B} означаваме индукциите на магнитните полета на двата тока. Ако означим с \vec{v} скоростта на зарядовия елемент dq , дължаща се на протичането на тока J , а с \vec{u} – скоростта на dq , дължаща се на движението на контура, можем да запишем израза:

$$(3.17) \quad d\vec{F}_m = dq\vec{u} \times \vec{B}'$$

за магнитната сила, и израза:

$$(3.18) \quad d\vec{F}^* = dq\vec{v} \times \vec{B}'$$

за индуцираната в L електродвижеща сила, действащи на зарядовия елемент dq . Според закона на Био – Савар

$$(3.19) \quad \vec{B}'(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} J' \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Около контура L' съществува електрично поле с интензитет \vec{E} , породено от промените на \vec{B} . Следователно на всеки зарядов елемент dq' от L' действа и една електрична сила $d\vec{F}_e = \vec{E}dq'$. Според закона на Фарадей:

$$(3.20) \quad \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r}' = -\frac{d}{dt} \int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S}',$$

където S' е произволна повърхност с директно ориентиран контур L' . За \vec{B} законът на Био – Савар дава израза:

$$(3.21) \quad d\vec{B}(\vec{r}') = \frac{\mu_0}{4\pi} J \frac{d\vec{r} \times (\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3}.$$

За следващите разглеждания са съществени следните свойства на вътрешните сили:

(I) Ако променим посоката на тока J (т.е. заменим в съответните формули J с $-J$ и dq с $-dq$), и трите сили променят посоките си на противоположните. За $d\vec{F}_m$ и $d\vec{F}^*$ това следва директно от (3.17) и (3.18). В същото време според (3.21) замяната на J с $-J$ променя знака на \vec{B} и поради (3.20) посоките на \vec{E} и на $d\vec{F}_e$ също се променят на противоположните.

(II) Ако променим едновременно посоките на J и J' (т.е. заменим J с $-J$, J' с $-J'$, dq с $-dq$ и dq' с $-dq'$), силите не се променят. За $d\vec{F}_m$ и $d\vec{F}^*$ това следва от (3.17) и (3.18), защото според (3.19) \vec{B}' също променя знака си. Интензитетът на полето \vec{E} променя знака си както в предишния случай, но като отчетем замяната на dq' с $-dq'$ виждаме, че електричната сила $d\vec{F}_e = \vec{E}dq'$ наистина не се променя.

Доколкото представляват резултат от взаимодействия между частите на системата, силите $d\vec{F}_m$, $d\vec{F}^*$ и $d\vec{F}_e$ са вътрешни. За да се поддържа стационарността, върху всеки зарядов елемент (dq или dq') трябва да действа и една външна сила, която уравновесява вътрешната. Поради това външните сили притежават същите две свойства.

Тъй като равенствата от (3.17) до (3.21) са линейни по отношение на токовете, на токовите елементи, на силите и на магнитните индукции, същите две свойства остават валидни и когато се касае не за силите между два линейни тока, а за външните сили, които действат на две произволни системи от стационарни токове (линейни, повърхнинни или обемни), тъй като стационарните повърхнинни и обемни токове винаги могат да се представят като съвкупност от голям брой тънки затворени токови нишки.

След тези предварителни разглеждания преминаваме към нашата цел. Да отбележим с K_1 произволна система от постоянни токове, които изпълват с плътност $\vec{I}(\vec{r})$ областта V (фиг. 5). Ако a е едно реално число, с K_a означаваме системата



фиг. 5.

от токове в същата област с плътност $\vec{I}_a(\vec{r}) = a\vec{I}(\vec{r})$. W_1 и W_a са енергиите на магнитните полета на тези системи.

Доколкото K_1 и K_a имат еднакво пространствено разпределение на токовете, двете системи са в известен смисъл *конгруентни*. Те биха могли да бъдат поставени на едно място по такъв начин, че да се получи нова система, K_{1+a} , която е конгруентна както с K_1 , така и с K_a . В тези означения, например, K_{-1} е система, в която токовете имат същата големина и противоположна посока в сравнение с токовете в K_1 , $K_1 + K_{-1} = K_0$ означава, че K_1 и K_{-1} могат да бъдат съвместени така, че токовете им да се компенсират и да получим система без токове (K_0) и т.н.

Ако си представим K_1 съставена от безброй много безкрайно тънки затворени токови нишки, W_1 е равно на работата на външните сили при пренасяне тези нишки от безкрайност до местата им. Поради свойство II, обаче, същите сили действат и между контурите, съставляващи K_{-1} – следователно $W_1 = W_{-1}$.

Когато имаме система, състояща се от две еднакви, безкрайно отдалечени системи K_1 , нейната начална енергия е $2W_1$. Ако A_1 е работата на външните сили при пренасяне и съвместяване на едната от системите K_1 с другата, получената система K_2 има енергия W_2 , за която съгласно определението за енергия имаме:

$$(3.22) \quad A_1 = W_2 - 2W_1.$$

Ако вместо K_1 и K_1 началното състояние съдържа K_1 и K_{-1} , крайното състояние ще бъде K_0 , а според свойство II работата на външните сили ще бъде $-A_1$ и отново от определението за енергия получаваме

$$(3.23) \quad -A_1 = 0 - 2W_1.$$

От (3.22) и (3.23) следва, че $W_2 = 4W_1$ и виждаме, че можем да повторим крачка по крачка разглежданията, които ни доведоха до връзката $W_n = n^2W_1$ в случая на електрични полета. И доколкото (3.21) гарантира, че $\vec{B}_n = n\vec{B}_1$, където \vec{B}_n и \vec{B}_1 са индукциите в една и съща точка на полетата на K_n и K_1 , заключаваме, че наистина енергията на магнитното поле е квадратична функция на индукцията на магнитното поле.

Лесно се вижда, че направеното подробно разглеждане може да се адаптира удобно по начин, който го прави приложим в училище. За целта е достатъчно да се обърне внимание на факта, че по същество интересуващото ни доказателство се опира на следните три предпоставки:

1. Енергията на една стационарна система от токове е равна на работата на външните сили при създаване на системата, т.е. при събиране на частите ѝ от безкрайност:

$$(3.24) \quad W_m = A.$$

(Това твърдение бе обосновано по-рано.)

2. Според закона на Био – Савар токовият елемент $d\vec{I}(\vec{r}')$ създава в точката с радиус-вектор \vec{r} поле с магнитна индукция:

$$(4.3,25) \quad d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{I}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Оттук и от принципа за суперпозиция следва, че ако плътността на токовете във всяка точка от V се увеличи едно и също число пъти (напр. n), в същата пропорция ще се увеличи и индукцията на полето във всяка точка на пространството. Следователно, ако с $\vec{B}_n(\vec{r})$ означим индукцията в точка \vec{r} от полето на системата K_n , то:

$$(3.26) \quad \vec{B}_n(\vec{r}) = n\vec{B}_1(\vec{r}).$$

3. Според закона на Ампер, магнитната сила, с която токовият елемент $d\vec{I}(\vec{r}')$ действа на токовия елемент $d\vec{I}(\vec{r})$, се описва с израза:

$$(3.27) \quad d\vec{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{I}(\vec{r}) \times [d\vec{I}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

От него се вижда, че ако всички токове в системата сменят едновременно посоките си, силите, които действат на елементите не се променят. Затова ако \vec{F}_1 означава магнитна сила, действаща на ток от системата K_1 , а \vec{F}_{-1} – съответната сила от K_{-1} , в сила е равенството:

$$(3.28) \quad \vec{F}_1 = \vec{F}_{-1}.$$

Тъй като свойствата на конгруентните системи от токове са аналогични на свойствата на конгруентни системи от заряди, оттук нататък може да се повторят всички разсъждения, приведени за случая на енергия на електричното поле. Единствената разлика е, че вместо системи от заряди трябва да се в разглеждат системи от токове и т.н.. Наистина, внимателното вглеждане в тези разсъждения показва, че те са валидни, независимо от характера на действащите в системата вътрешни сили (електрични или магнитни), стига да са изпълнени равенствата (3.24 – 3.28). Следователно и заключението, до което се достига, е аналогично на направеното при електричните полета – енергията на магнитното поле е квадратична функция на характеристиката на полето – неговата индукция.

Тези строги разглеждания могат да бъдат адаптирани към равнището на разглежданията в училище, като във всички закони вместо безкрайно малки величини от типа на dq , $d\vec{B}$ и т.н. се използват обичайните за училищния курс Δq , ΔB и пр., а вместо интегралните векторни формулировки на законите (3.19)–(3.21) – съответните скаларни формули за локалните връзки. Разбира се, и тук става дума за знания от трета степен на достъпност, които могат да бъдат предлагани за запознаване само на отделни ученици.

4. Знанията за електромагнитното поле във вид на физична теория

Теорията на електромагнитните явления се изгражда с помощта на две фундаментални понятия (електричен заряд и електромагнитно поле) и върху основата на четири фундаментални явления – електричното взаимодействие на неподвижни заряди (описвано с фундаменталния експериментален закон на Кулон), магнитното взаимодействие на постоянни токове (описвано с фундаменталния експериментален закон на Ампер), електромагнитната индукция (описвана с фундаменталния експериментален закон на Фарадей) и токът на отместване (описван със съответния закон на Максвел). Те представляват базата, върху която се достига до основните закони на електромагнитното поле – уравненията на Максвел. Сред специалистите по методика на обучението по физика обикновено не се оспорва твърдението, че, въпреки че общонаучната математична подготовка на учениците "не дава възможност в училище да се изучават уравненията на Максвел без вулгаризация", все пак "трябва да се разкрият основните идеи на Максвел в достъпна за тях форма и с помощта на съвременни представи."²¹ Както обосновахме по-рано, въпросните "съвременни представи" включват използването на глобалната форма на уравненията, която, макар и неудобна за решаване на практически проблеми, все пак дава възможност да се разгледат някои най-важни следствия от теорията.

Единствената особеност при структуриране на знанията за електромагнитните явления по модела за физична теория, която още не е споменавана и заслужава внимание, е свързана с третото фундаментално явление на електродинамиката – с електромагнитната индукция. В училище обикновено се полагат усилия, за да се изяснят двата принципно различни (когато водим разсъжденията от фиксирана отправна система!) случая на това явление. Въпреки това, като правило не става ясно, че терминът електромагнитна индукция употребяваме веднъж в широк смисъл (когато имаме предвид всички случаи, в които в един контур се индуцира ток) и в тесен смисъл (когато променливото с времето магнитно поле поражда електрично поле) и, че само във втория случай става дума за фундаментално явление.

4.1. За обосноваване на наличието на ток на отместване

Измежду фундаменталните явления и експериментални закони само явлението ток на отместване и законът на Максвел не намират достатъчно място в нашата учебна литература. В общозадължителната подготовка явлението в най-добрия случай само се споменава, а в помагалата за свободноезбираема подготовка законът на Максвел, ако изобщо се спомене, се дава наготово. Доколкото въпросът с обосноваване на наличието на ток на отместване е въпрос, който в историята на физиката заема особено място (при решаването му за пръв път в електродинамиката теоретичната мисъл изпреварва експеримента), неговото разглеждане е принципно важно и може да се отнесе както към знанията от втори, така и към тези от трети вид.

В чуждестранната методическа и учебна литература въпросът за обосноваване необходимостта от наличие на явление, обратно на електромагнитната индукция, и до днес е един от най-дискутираните, защото чрез него се "разкрива процеса на решаване на проблема, историята на откритието, в известен смисъл съкратено се възпроизвежда пътят към доказателственото познание и откриването на ново научно знание."²² (111, с. 315). Разглеждането на този въпрос има пряко значение за развитие на физическото мислене и на творческите способности на учениците, защото показва "динамиката и "вътрешните пружини" за развитието на най-важните идеи и теории ...запознава

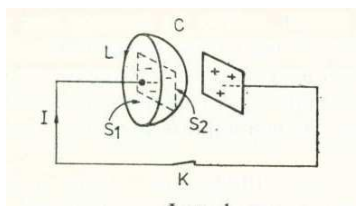
²¹ *Методика преподавания физики в средней школе*, Под ред. С. Е. Каменецкого и Л. А. Ивановой, М., Просвещение, 1987.

²² *Педагогика*, Под ред. Г. Нойнера и Ю. К. Бабанского, М., "Педагогика", 1984.

учениците с фундаменталните проблеми, възникнали във физиката и с пътищата на тяхното решаване."²³.

Преди да преминем към разглеждане на въпроса по същество, ще припомним, че Максвел достига до идеята за ток на отместване, разглеждайки движението на свързаните заряди в диелектриците, когато са поставени в променливо електрично поле. Този подход и днес има своето евристично значение, което се дължи на нагледността му, но има недостатъка, че фактически той третира въпроса за поляризационните токове и оставя открит въпроса "А какво се отмества във вакуума?". (За Максвел, който си служи с механични аналогии и за когото вакуумът има свойствата на диелектрик, този въпрос не стои по такъв начин.)

Използваната по-долу идея за свързване на закона за запазване на заряда с хипотезата за тока на отместване, се опира на един мислен опит. В последно време този прием намира все по-голямо приложение в училище като средство за нагледност при излагане на сложен материал. Този мислен опит, в различни модификации, се използва в редица публикации и курсове по физика. Негова адаптация към условията на нашето училище бе изложена в²⁴, където отново се прилага описаният в началото подход. Отличителна черта тук е ударението, което се поставя върху използването на закона за запазване на електрическия заряд. Начална стъпка в обосноваване необходимостта от новото явление е заключението, че първият основен закон на стационарното магнитно поле – законът $\Gamma_B = \mu_0 J$, не може да бъде валиден в този си вид и за променливи полета. Причината е във факта, че за променливи токове вече понятието *ток обхващан от крива L* губи смисъл – тъй като сега полето не е стационарно, вторият аргумент, който използвахме в 3.2.2 за доказване на независимостта на тока от избора на повърхността, имаща контур L , тук не е валиден. Този факт става ясен ако се постави въпроса какъв ток обхваща кривата L , когато по представения на фиг. 6 контур се разтоварва плосък кондензатор. Очевидно е, че през диска с център т. A ток тече, а през полусферата, която обхваща единия електрод на кондензатора, въпреки че има същия контур L , токът е нула.



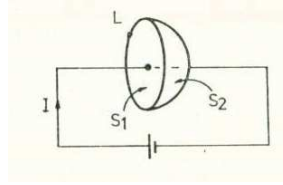
Фиг. 6.

Следователно прилагането на закона $\Gamma_B = \mu_0 J$ за контура L е невъзможно поради неяснотата по въпроса през коя повърхност следва да се пресмята тока, обхващан от кривата L .

Втора стъпка е хипотезата на Максвел, че в дясната страна на закона на Ампер за тока трябва да стои величина с размерност на ток, която обаче не зависи от избора на повърхността, през която се пресмята. За намиране величина с подобно свойство се разглежда областта, заградена от две повърхнини S_1 и S_2 , които имат общ контур L и се пробождаат от проводник, по който тече променлив ток (фиг. 7). (Фактът, че за простота S_1 е избрана във форма на диск, а S_2 – на полусфера, не ограничава общността на

²³ Малафеев Р. И. *Проблемно обучение физике в средней школе*, М., Просвещение, 1980.

²⁴ Попов Хр. *Ток на отместване*, Физика, 1, 1985.



Фиг. 7.

разсъжденията.) Ако Φ_{E1} и Φ_{E2} са потоците на електричното поле през S_1 и S_2 , и ако съответно предположим валидността на теоремата на Гаус и за променливи полета, от нея намираме:

$$(4.1) \quad \Phi_{E1} - \Phi_{E2} = \frac{q}{\epsilon_0},$$

а за промяната за единица време:

$$(4.2) \quad \frac{\Delta\Phi_{E1}}{\Delta t} - \frac{\Delta\Phi_{E2}}{\Delta t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

В същото време ако с J_1 означим тока, който влиза в разглежданата област през S_1 , а с J_2 – тока, който я напуска през S_2 , законът за запазване на електричния заряд гарантира изпълнението на равенството:

$$(4.3) \quad \frac{\Delta q}{\Delta t} = J_1 - J_2.$$

От (4.2) и (4.3) след прегрупиране на членовете следва:

$$(4.4) \quad J_1 + \epsilon_0 \frac{\Delta\Phi_{E1}}{\Delta t} = J_2 + \epsilon_0 \frac{\Delta\Phi_{E2}}{\Delta t}.$$

Тъй като повърхностите S_1 и S_2 са по принцип произволни (с единственото ограничение да имат общ контур), заключението е, че не токът J на движещите се заряди, а сборът му с величината $\epsilon_0 \frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t}$ не зависи от избора на повърхността. Така се достига до хипотезата на Максвел, че в променливите полета е валиден обобщен закон на Ампер, дясната страна на който има вид:

$$(4.5) \quad \Gamma_B = \mu_0 \left(J + \epsilon_0 \frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t} \right).$$

В областите, в които няма заряди, от (4.5) се получава разгледаният в 2.3 закон на Максвел:

$$(4.6) \quad \Gamma_B = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t},$$

който описва четвъртото фундаментално явление – възникването на вихрово магнитно поле, предизвикано от промените на електричното поле с времето.

С това, че съществува възможност да се обоснове необходимостта от ток на отместване и да се достигне до обобщения закон на Ампер за тока (4.5), разбира се, се запълва една логическа празнина, но също така ценен от дидактическа гледна точка е и фактът, че съществува случай, в който този закон може да се приложи за решаване реален проблем. В случая се касае за факта, че когато един зареден плосък въздушен кондензатор се разрежда при йонизиране на въздуха между електродите му, въпреки наличието на йонен ток, магнитно поле не се създава – с помощта на (4.5) и закона за запазване на електричния заряд лесно се показва, че токът на отместване в случая точно компенсира тока на зарядите, така че източници на магнитно поле фактически няма.

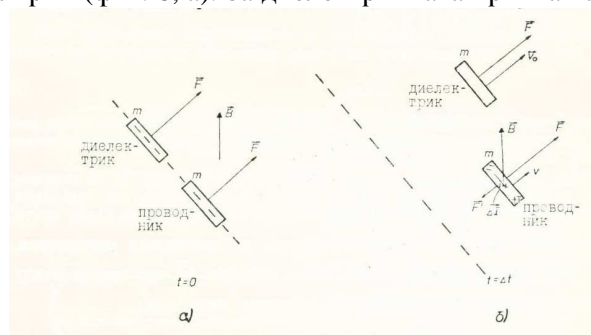
4.2. Импулс на електромагнитното поле

В 2.2.1 и в 3.3 бяха разгледани въпросите за енергията съответно на електричното и на магнитното поле. При това се оказа възможно чрез разглеждане на подходящи частни случаи да се получат изрази и за плътностите на тези енергии. За да бъде още по-убедително твърдението, че електромагнитното поле е материален обект, обаче, е желателно да се покаже, че подобно на телата, полето притежава и импулс. Този въпрос обикновено стои извън обсега на разглежданията в курсовете по физика за средните училища, макар в това отношение да има изключения представлява²⁵. Идеята на разглеждането там се свежда до проследяване поведението на неподвижен точков заряд в полето на плоска монохроматична вълна: зарядът започва да трепти периодично в направление на електричния вектор на вълната, а това движение от своя страна поражда магнитна сила, която през всеки полупериод на вълната е насочена по посока на нейното разпространение. Под действието на тази сила зарядът придобива механичен импулс в същата посока и от закона за запазване на импулса се прави заключение, че този импулс частицата е получила за сметка на импулса, който пренася електромагнитната вълна. Положителна страна на този подход е директната възможност, която той предлага за обяснение на явлението налягане на светлината. В същото време, обаче, може да се създаде погрешното впечатление за нарушаване на закона за запазване на импулса на системата вълна – заряд, защото не се дискутира въпросът за намаляването на импулса на самата вълна (и всъщност няма как да се направи това – той е безкрайно голям).

Една съвсем различна възможност да се направи това (също без количествени изводи) на равнището на разглежданията в училище, бе предложена в²⁶. Въпросната възможност се опира на закона за запазване на импулса. Идеята е да се намери относително проста система от заряди и електромагнитното им поле, върху която действа външна сила \vec{F} . Ако за такава система се покаже, че импулсът на силата $\vec{F}\Delta t$ е по-голям от нарастването на механичния импулс $\Delta \vec{p}_{\text{мех}}$ на зарядите, съгласно с втория принцип на механиката, това ще бъде указание, че липсващият импулс се носи от полето, т.е. – самото поле притежава импулс.

За целта може да се разгледа поведението на две неподвижни пръчки с равни маси m , едната от диелектрик, другата от проводник. Когато върху всяка от пръчките действа сила с големина F , съгласно с втория принцип на динамиката след интервал Δt тя ще придобие скорост $v_0 = F\Delta t/m$.

Да разгледаме сега същите пръчки, но разположени в постоянно магнитно поле така, че посоките на пръчките, на силите \vec{F} и на индукцията \vec{B} на полето да бъдат взаимно перпендикулярни (фиг. 8, а). За диелектричната пръчка наличието на поле е



Фиг. 8.

²⁵ Суорц Кл. Э. *Необыкновенная физика обыкновенных явлений*, ч. 2, М., Наука, 1987.

²⁶ Попов Хр. *Импулс на електромагнитното поле*, Физика, 5, 1983.

без значение – след време Δt скоростта ѝ ще бъде отново v_0 , а механичният импулс – $mv_0 = F\Delta t$. В проводящата пръчка обаче протичат по-сложни процеси. Под действие на магнитните сили свободните заряди в нея се задвижват и в двата ѝ края започват да се натрупват заряди с противоположни знаци. Това движение продължава, докато електричното поле на зарядите нарасне дотолкова, че породените от него електрични сили върху свободните заряди уравнишат магнитните. Придвижването на зарядите обаче представлява протичане на ток, ток, който, първо, създава свое магнитно поле и, второ, според закона на Ампер за магнитната сила и съответното правило на изпънатите пръсти на дясната ръка, предизвиква поява на магнитна сила \vec{F}' , противоположна по посока на \vec{F} (фиг. 8,б). Следователно проводящата пръчка се ускорява не от силата \vec{F} , а от разликата $\vec{F} - \vec{F}'$, така че след интервал време Δt скоростта ѝ ще бъде $v < v_0$. Затова нейният механичен импулс ще бъде не mv_0 , а по-малък. И тъй като импулсът $F\Delta t$ на външната сила в двата случая е един и същ, следва заключението, че сега освен за създаване на механичен импулс на пръчката той (според закона за запазване на импулса) е отишъл за създаване и на някакъв друг импулс. Тъй като освен разликата в скоростите на двете пръчки, единствената друга разлика в състоянията на двете системи е наличието на електромагнитно поле при проводящата пръчка, следва заключението, че недостигащият импулс $m(v_0 - v)$ се носи от полето, т.е. *наистина електромагнитното поле притежава импулс*. По този начин импулсът на втората система се оказва сума от две събираеми: от механичния импулс на пръчката и от импулса на електромагнитното поле. (Трябва да се има предвид, че тук не става дума за външното магнитно поле, което при тези процеси остава постоянно, а за променливото магнитно поле, породено от кратковременния токов импулс при преразпределяне на свободните заряди в пръчката.)

Преимущество на развития подход е явното използване на знанията от механиката за импулс на сила и импулс на тяло, на връзката им посредством втория принцип на динамиката и на закона за запазване на импулса на затворена система.

4.3. Следствия от уравненията на Максвел

Познаването на глобалната форма на основните закони на електромагнитното поле, т.е. на уравненията на Максвел, дава възможност да се разгледат някои интересни и важни от теоретична гледна точка техни следствия като връзката между интензитета на електричното и индукцията на магнитното поле в една плоска вълна, извода на формулата на Максвел за скоростта на електромагнитните вълни във вакуум, излъчването на енергия от ускорено движещи се заряди и т.н. Общо взето в чуждестранната методическа и учебна литература тези въпроси са разработени отдавна. У нас опити за прилагане на уравненията на Максвел за разглеждане споменатите проблеми са правени в²⁷.

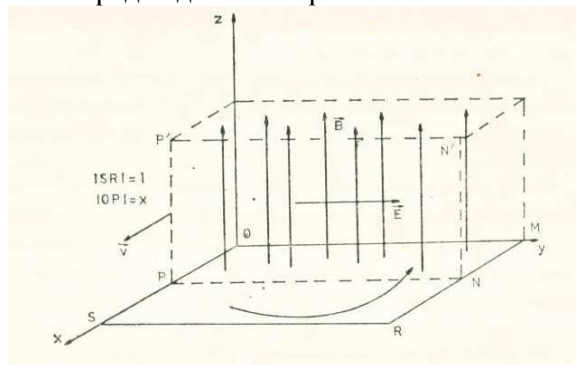
4.3.1. Връзка между E и B в плоска електромагнитна вълна

Свойството на електромагнитното поле да се самоподдържа, т.е. фактът, че промените на електричното поле пораждат магнитно поле, което от своя страна поражда електрично и т.н., се коментира обикновено на качествено равнище още в общозадължителния минимум. По-пълно и далеч по-строго изложение на въпроса за разпространение на промените полето и за извода на големината на тяхната скорост може да се намери например в редица учебници, предназначени за колежи. В последния случай обаче интересуващата ни връзка между характеристиките на

²⁷ Борисов М. и др. *Физика за 11. клас на общообразователните трудово-политехнически училища*, С., НП, 1973.

електричното и магнитното поле се обвързва с въпроса за крайната скорост на разпространение на електромагнитните вълни, поради което не изпъква принципната й роля и условията, при които е валидна.

Най-краткият път към намиране връзката между E и B включва разглеждане на полето в свободно от заряди пространство, в което по посока на оста Ox се разпространява със скорост c хомогенно магнитно поле, чиято индукция B е успоредна на оста Oz (фиг. 9). Нека в даден момент полето е достигнало до равнината $PP'N'N$. Тъй като това е променливо магнитно поле, то създава вихрово електрично поле и задачата е с помощта на закона на Фарадей да се намери големината на неговия интензитет E .



Фиг. 9.

За целта прилагаме закона на Фарадей за правоъгълния контур $OSRMO$. Ако дължината на страната SR означим с l , а на OP – с x , скоростта на промяната на магнитния поток през контура е $\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = Bl \frac{\Delta x}{\Delta t} = Blc$, тъй като $\frac{\Delta x}{\Delta t} = c$ е точно скоростта, с която се придвижва границата на полето в посока на оста Ox .

За пресмятане циркулацията на електричното поле по контура е необходимо първо да се определи посоката му. Според правилото на Ленц, ако контурът $OSRMO$ е проводящ, предизвиканият от E ток по него трябва да създава магнитно поле, чиито поток компенсира нарастването на потока на началното магнитно поле. Това означава, че токът е в посока $OMRSO$. Тъй като промяната на магнитното поле не е достигнала още SR , електрично поле ще има само в областта на правоъгълника $OMNP$ и според казаното ще бъде едноразлично с оста Oy . При това положение принос към циркулацията по целия затворен контур дава само участъкът OM . Тъй като неговата дължина е l , а посоките на E и на обхождането на контура са противоположни, въпросната циркулация ще бъде $\Gamma_E = -El$.

Като заместим намерените изрази за $\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$ и Γ_E в закона на Фарадей за електромагнитната индукция, получаваме:

$$(4.7) \quad E = cB.$$

По такъв начин само чрез закона на Фарадей се получава важна връзка между характеристиките на полето в една плоска вълна.

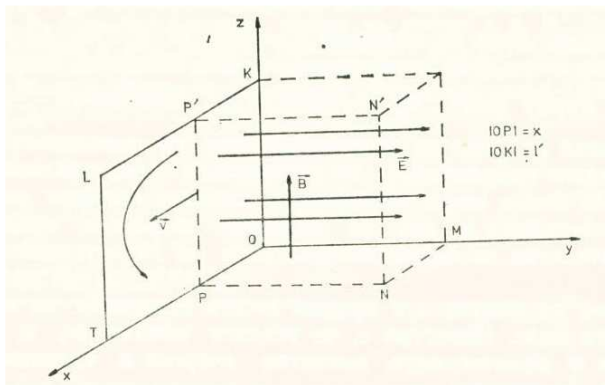
4.3.2. Скорост на разпространение на промените на електромагнитното поле

Въпросът за най-важното следствие от уравненията на Максвел – съществуването на електромагнитни вълни и извода на формулата на Максвел за тяхната скорост са подробно разработени както в методическата, така и в учебната литература.

Както е показано в²⁸, изводът на формулата на Максвел е естествено продължение на разсъжденията, които водят да намиране на връзката (4.7). Наистина, възникналото вследствие придвижване на магнитно поле електрично поле, което обхваща все по-голяма област, т.е. – променя се с времето, съгласно с хипотезата на Максвел, поражда магнитно поле, чиято циркуляция се подчинява на закона на Максвел (4,6). Намирането на индукцията B на това поле става по начин, аналогичен на вече приложения в 4.3.1, като в случая само местата на E и B са разменени.

За целта първо трябва да се пресметне скоростта на промяна на потока на електричното поле през затворения контур $OKLTO$ (фиг. 10). Ако l' е дължината на OK и се отчете, че полето е достигнало само до равнината $PP'N'N$, за търсената скорост се

$$\text{получава } \frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t} = El' \frac{\Delta x}{\Delta t} = El' c .$$



Фиг. 10.

Както и в 4.3.1, но с отчитане на факта, че законите на Максвел и на Фарадей са аналогични, но се различават по знака в дясната страна на равенствата, се определя, че индуцираното магнитно поле има посока на оста Oz , така че принос към циркуляцията по затворения контур $OKLTO$ има само участъкът $OK - \Gamma_B = Bl'$. От изразите за $\frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t}$ и

за Γ_B се получава връзката:

$$(4.8) \quad B = \epsilon_0 \mu_0 c E.$$

Сравняването на (4.7) и (4.8) води непосредствено да търсената формула на Максвел:

$$(4.9) \quad c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

за скоростта, с която се разпространяват **промените** на електромагнитното поле във вакуум. (В скоби ще подчертаем, че става дума наистина за скорост на разпространение на промените на полето, а не за скорост на полето, както често се казва. Наистина, полето като такова заема цялото пространство и няма как да се движи – движат се неговите промени.)

Този подход има един съществен и никъде не отбелязван недостатък –

пресмятайки по-горе $\frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t}$, ние мълчаливо предполагахме, че промените на

електричното поле с времето се разпространяват със същата скорост c , с която в 4.3.1 предположихме, че се разпространяват промените на магнитното поле – един факт, който не следва от никъде.

²⁸ Попов Хр. Следствия от уравненията на Максвел, Физика, 6, 1990; 1, 1991.

С получените връзки (4.8) и (4.9) може допълнително да се покаже, че в една плоска вълна плътностите на електричната и на магнитната енергия ($w_e = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$ и $w_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2$) са равни.

4.3.3. Излъчване на електромагнитни вълни

Общото и строго разглеждане на най-важното следствие от уравненията на Максвел – излъчването на електромагнитни вълни, изисква използването на недостъпен за учениците математически апарат. В методическата литература са известни редица разработки, опиращи се на известния подход на Дж. Дж. Томсон, които при съответни опростявания, успяват да обхванат на едно допустимо по своята разбираемост равнище най-съществените черти на процесите както в качествено, така и в количествено отношение. В учебната литература въпросът за излъчване на ускорено движещ се заряд е разработен сравнително пълно, а на качествено равнище – и у нас²⁷ и²⁹. Тези примери показват, че съществуват подходящо адаптирани изложения на проблема, но опитът по прилагане на учебниците у нас показва, че разглеждането му в рамките на общозадължителната подготовка среща сериозни затруднения. Поради това изучаването на излъчването на ускорени заряди в учебника⁴ бе изнесено при изучаване на електродинамиката на второ равнище, т.е. това са знания от втори и трети вид според направеното в началото деление. Едно предимство на разработката в²⁸ и в⁴ е ясното разграничение на предпоставките, върху които се опира извода на условието за излъчване на електромагнитна енергия и на елементите, етапите в разсъжденията при този извод.

Първата предпоставка е характерът на полето на равномерно движещ се точков заряд. Учениците или не познават основите на специалната теория на относителността, или, ако вече са ги изучавали, учебното съдържание не включва формулите за трансформация на компонентите на електричното поле при преход от една отправна система в друга. Поради това от известния израз за интензитета на полето на неподвижен заряд не е възможно да се получи точен израз за полето на равномерно движещ се заряд. Запознаването с характера на това поле може да стане само декларативно, т.е. с позоваване на специалната теория на относителността да се формулира *първата предпоставка*, че

при равномерно движение със скорост $v \ll c$, електричното поле на точков заряд q е като на неподвижен заряд,

като, разбира се, цялата картина на полето се придвижва в пространството със същата скорост v , с която се движи зарядът. Полето е неподвижно свързано със заряда, обгръща го подобно на шуба и електромагнитна енергия в пространството не се излъчва – кинетичната енергия на заряда остава постоянна.

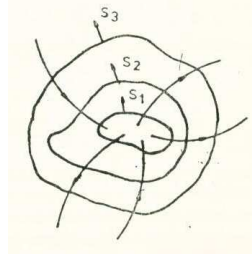
Втора предпоставка е обосноваването в 4.3.2 следствие от уравненията на Максвел, че

промените на електромагнитното поле с времето се разпространяват в пространството с крайна скорост, която за вакуум се определя от формулата на Максвел (4,9).

Като трета предпоставка се използва теоремата на Гаус и по-точно – едно геометрично нейно следствие, но приложено вече за променливи полета. До това следствие се достига ако се разгледат няколко вложени една в друга затворени повърх-

²⁹ Попов Хр. и др. *Физика за 10. клас на ЕСПУ*, С., Народна просвета, 1983.

ности S_1, S_2, S_3, \dots (фиг. 11), които обгръщат от всички страни зареденото тяло S . Когато в пространството между тези повърхности няма електрични заряди, по силата на



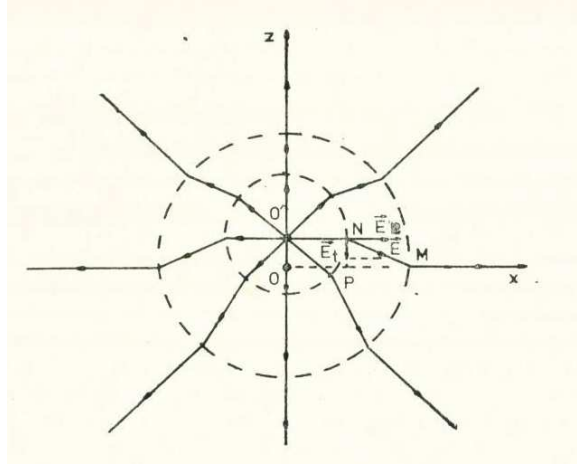
Фиг. 11.

теоремата на Гаус потоците на интензитета на електричното поле през всяка от тях са равни. Това означава, че повърхностите се прободат от един и същ брой силови линии. С други думи *третата предпоставка* е, че

в празното пространство електричните силови линии са непрекъснати криви.

С помощта на тези три предпоставки могат да се направят следните разсъждения:

Нека, започвайки от момента $t = 0$, един неподвижен в т. O заряд q за кратък интервал време τ се задвижи с ускорение a по посока на оста Oz , след което продължи да се движи равномерно с придобитата скорост $v = \tau a$. Интервалът τ трябва да бъде толкова кратък, че да бъде гарантирано неравенството $v = \tau a \ll c$. Ние се интересуваме от характера на полето в един момент $t = \tau + T$, където интервалът време T удовлетворява условието $\tau \ll T$. Последното неравенство гарантира, че изминатият по време на ускоряването път е много по-малък от пътя, изминат с постоянна скорост ($a\tau^2/2 \ll vT = a\tau T$). Поради това на фиг. 12 разстоянието OO' между положенията на заряда в моментите $t = 0$ и $t = \tau + T$ е означено като vT (вместо истинското $vT + a\tau^2/2$).



$$|OO'| = vT$$

$$|O'N| = cT$$

$$|OM| = c(T + \tau)$$

Фиг. 12.

Първият етап от решаването на поставената задача включва изясняване на характера на електричното поле в различни части на пространството. От фигурата се вижда, че цялото пространство се разделя на три подобласти:

– Първата подобласт обхваща пространството извън сферата с център в т. O , имаща радиус $c(\tau + T)$. В нея полето е все още електростатично и съответства на полето на точков заряд q , намиращ се в т. O . Това твърдение се опира на втората предпоставка: щом промените на полето се разпространяват с крайна скорост c , за време $\tau + T$ те не могат да се разпространят извън сферата с радиус $c(\tau + T)$. Затова силовите линии в тази подобласт представляват лъчи, чиито продължения се събират в т. O .

– Втората подобласт представлява също сфера, но вече с център в т. O' и с радиус cT . В нея, отново според втората предпоставка, вече се е установило поле на равномерно движещ се заряд, а то, според първата предпоставка, е като на неподвижен заряд. Затова силовите линии в тази подобласт са също части от прави, но излизащи от т. O' .

– Третата подобласт е затворена между посочените по-горе сфери. В това пространство става преход от поле на неподвижен в т. O заряд към поле на равномерно движещ се със скорост v заряд, който се намира в т. O' . За определяне на характера на полето в тази област се използва третата предпоставка: тъй като в нея няма заряди, електричните силови линии трябва да бъдат непрекъснати криви, двете сфери трябва да се пробождат от един и същ брой силови линии. Именно това изискване е спазено на фигурата: силовите линии се пречупват върху повърхностите на сферите. От същата фигура се вижда и най-съществената особеност на полето в тази област – там интензитетът му има не само радиална (надлъжна) компонента E_r , но и напречна компонента E_t : $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_t$.

Вторият етап от решаването на задачата включва определяне зависимостта на напречната компонента на полето от разстоянието до т. O' . От фигурата се вижда, че E_t е най-голяма в направление, перпендикулярно на посоката на ускорението, така че ще ни интересува E_t в т. N , която лежи в направление, перпендикулярно на ускорението. От подобие на $\triangle MNP$ и триъгълника, образуван от трите вектора \vec{E} , \vec{E}_r и \vec{E}_t се вижда, че:

$$\frac{E_t}{E_r} = \frac{|NP|}{|PM|}, \quad \text{т.е.} \quad E_t = \frac{|NP|}{|PM|} E_r.$$

Тъй като $|NP| = |OO'|$, то $|NP| = vT$. От друга страна $|PM|$ е разстоянието, което се изминава със скорост c за време τ , т.е. $|PM| = c\tau$. Тогава, като предположим, че върху повърхнината на вътрешната сфера радиалната компонента на полето се описва със закона на Кулон (предположение, тясно свързано с първата предпоставка), то:

$$E_t = \frac{vT}{c\tau} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

където с r е означено разстоянието $|O'N|$. От получения израз посредством равенството $r = cT$ може да се елиминира интервалът T , така че окончателно:

$$E_t = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}.$$

Случаят, в който ъгълът между посоката на ускорението и посоката към точката на наблюдение е не $\pi/2$, а има произволна стойност θ , се различава от вече разглеждания само по това, че вместо равенството $|NP| = |OO'|$, сега е валидно съотношението $|NP| = |OO'| \sin\theta$. Следователно повтарянето на всички разглеждания води до окончателния израз за напречната компонента на полето:

$$(4.10) \quad E_t = \frac{qa \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r},$$

който определя зависимостта ѝ както от разстоянието до заряда, така и от посоката към точката на наблюдение. Формула (4.10) съдържа най-важния резултат и по същество всичко, което следва по-нататък, са само нейни коментарии и следствия.

Първо следствие от (4.10) е твърдението, че поради ускореното движение на заряда, в третата, междинна подобласт се установява електрично поле, което, за разлика

от досега разглежданите радиални статични и стационарни електрични полета, има *напречна компонента*.

Второто следствие е, че с отдалечаване от източника напречното електрично поле намалява относително по-бавно – *обратно пропорционално само на първата степен на разстоянието* до него. Изучаваните дотук статични и стационарни полета са обратно пропорционални на r^2 , т.е. те намаляват по-бързо. Следователно с отдалечаване от източника отношението E_r/E_t клони към нула и може да се смята, че на достатъчно големи разстояния полето е вече чисто напречно, т.е. перпендикулярно на посоката на разпространение. По такъв начин се дава отговор на въпроса как може да се получи електрично поле, което е перпендикулярно на посоката на разпространение на промените на полето – въпрос, който в 4.3.1 не бе дискутиран. Като се отчете казаното там, че подобно поле е неразривно свързано с напречно магнитно поле, се достига до **първото важно следствие** от направените разглеждания:

Далече от ускорено движещ се заряд съществува напречно електромагнитно поле, чиито характеристики E и B са право пропорционални на ускорението на заряда, на синуса от ъгъла между ускорението и посоката на наблюдение и са обратно пропорционални на първата степен на разстоянието до заряда.

Дотук разсъжденията имат в известен смисъл кинематичен характер – в тях не участва силата, която предизвиква ускорението на заряда. За да се достигне до заключението, че ускорено движещият се заряд излъчва енергия, трябва да се включат и динамични съображения, т.е. да се отчете какви сили действат, каква работа извършват те и какви трансформации на енергията се осъществяват.

Според първия принцип на динамиката, когато се движи равномерно, на заряда не действа никаква сила. Заедно със заряда се движи и неговото поле, но и двата процеса (преместването на заряда и преместването на полето му) не са свързани с преобразуване на енергия – няма сила, която да извършва работа, не се променя кинетичната енергия на заряда, не се променя и енергията, съсредоточена в полето му.

Според втория принцип на динамиката в интервала време t върху заряда действа постоянна сила. Тази сила извършва механична работа за сметка на енергията на източника на силата. Тъй като зарядът непременно притежава маса (това е едно от фундаменталните му свойства), част от тази работа отива за увеличаване на неговата кинетична енергия.

Както се оказва обаче, ускоряването на заряда има за резултат и появата на едно напречно електромагнитно поле, което се отдалечава от източника си със скорост c и характеристиките на което намаляват като $1/r$. Тъй като плътностите на енергията на електричното и на магнитното поле са пропорционални на квадратите на тези

характеристики ($w_e = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$ и $w_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2$), то количеството електромагнитна енергия в

единица обем ($w_{em} = w_e + w_m$) ще бъде пропорционално на $1/r^2$. Понеже скоростта на пренасяне на промените на полето и на носената от него енергия е c , през единица площ, перпендикулярна на посоката на движение на енергията, за единица време преминава енергия cw_{em} . Тогава общото количество енергия, което ще пресече една сфера с център в заряда и с радиус r ще бъде $(4\pi r^2)cw_{em}$. Предвид казаното дотук е ясно, че това произведение няма да зависи от r , т.е. през всяка сфера, независимо от нейния радиус, за единица време преминава едно и също количество енергия – енергията не се натрупва никъде, а се пренася в радиална посока.

По такъв начин се достига до второто важно следствие от направените разсъждения:

Ускорено движещият се заряд излъчва в околното пространство електромагнитна енергия.

По такъв начин част от енергията на източника на ускоряващата сила, посредством извършената от нея работа, се превръща в енергия на полето, която се отдалечава от заряда със скорост c .

На обстоятелството, че при ускоряване на заряд част от работата на ускоряващата сила отива за излъчване на електромагнитна енергия, може да се гледа и от друга страна, като се направи разсъждение, аналогично на това, с което бе обосновано наличието на импулс на електромагнитното поле. Наистина, ако например се ускоряват две частици с равни маси, но едната заредена, а другата не, за да получат еднакви ускорения, на заредената частица трябва да действа по-голяма сила, защото тя, освен за увеличаване на кинетичната енергия на частицата, трябва да извърши и допълнителна работа за излъчване на електромагнитна енергия. Ефективно това означава, че заредената частица има по-голяма маса. Допълнителната маса се дължи на полето на частицата, поради което се казва, че тази маса има електромагнитен характер или електромагнитен произход.

Съдържащият се във формула (4.10) резултат може да се използва за обясняване на редица важни закономерности при излъчване на електромагнитна енергия. Преди всичко, например, поради това, че периодичните движения са ускорителни движения, следва, че *всеки периодично движещ се заряд излъчва електромагнитна вълна*. И тъй като ускорението е пропорционално на квадрата на честотата ν , а излъчената за единица време енергия – пропорционална на E^2 , от (4.10) следва, че *мощността на излъчването ще бъде пропорционална на ν^4* . От същата формула следва също, че в направление на ускорението енергия не се излъчва, а максимално количество енергия се излъчва в равнината, перпендикулярна на ускорението и т.н., с което се обясняват на качествено равнище особеностите на излъчването на диполна антена.

По такъв начин се обосновават редица важни следствия от теорията на Максвел. С това, освен че се дава отговор на редица важни за практиката въпроси, се допринася за доизграждането на електродинамиката като типична физична теория с нейната основа, ядро и следствия.

4.4. Систематизация и обобщение на знанията по електродинамика

Всички програми за обучение по физика в средните училища през последните десетилетия предвиждат в края на раздела, в който се изучават електромагнитните явления, часове за преговор, систематизация и обобщение на знанията. В съответствие с конкретно действащата програма в даден момент въпросът за най-рационалното им използване е разработван в³⁰ и в³¹. Там са разкрити редица възможности, които улесняват достигането на дидактическата цел: в ограниченото време за преговор, систематизация и обобщение най-ясно да изпъкнат онези понятия и закони, които, изнесени от общата съвкупност на всички изучени понятия и закони и обобщени по подходящ начин, позволяват да се изгради една единна и в количествено отношение правдоподобна картина за електромагнитните взаимодействия.

4.4.1. Систематизиране и обобщаване на знанията за

³⁰ Попов Хр. *Относно преговорно-обобщителната тема "Основни закони на електромагнитното поле"*, Физика, 3, 4, 1983.

³¹ Попов Хр. *За обобщаване учебния материал по електродинамика*, Физика, 2, 1989.

електромагнитните взаимодействия във вакуум

За преговор, систематизиране и обобщаване на знанията за електромагнитните взаимодействия във вакуум може да се използва подходяща таблица – един често използван в обучението по физика прием. В случая той дава отлична възможност да се систематизират и структурират във вид на физична теория едновременно електростатиката, теорията на стационарните магнитни процеси и теорията на променливото електромагнитно поле. С оглед известно опростяване, при което по-добре изпъкват отделните елементи на разглежданите теории, тук предлагаме един съкратен вариант на такава таблица. Възможно е тя да се използва както наготово, така и да се попълва постепенно в часовете за обобщение последователно след изучаване на раздела електростатика и раздела за стационарните магнитни явления.

Таблица
Структура на електродинамиката и нейните раздели
като физични теории

Теория		Електростатика	Стационарно магнитно поле	Електродинамика
Елементи	Идеализирани обекти	електричен заряд електрично поле	електричен ток магнитно поле	електричен заряд електромагнитно поле
ОС-НОВА	Фундаментални явления	взаимодействие на неподвижни заряди	взаимодействие на постоянни токове	1. взаимодействие на неподвижни заряди 2. взаимодействие на постоянни токове 3. електромагнитна индукция 4. ток на отместване
	Емпирична база	Кулон	Ампер	Кулон, Ампер, Фарадей, Максвел
	Фундаментални експерим. закони			
	Система от основни величини	$q, \vec{E}, \Gamma_E, \Phi_E$	$\vec{B}, \Gamma_B, \Phi_B$	$q, \vec{E}, \vec{B}, \Gamma_E, \Gamma_B, \Phi_E, \Phi_B$
ЯДРО	Основни закони на полетата	$\Gamma_E = 0$ $\Phi_E = q/\epsilon_0$	$\Gamma_B = \mu_0 I$ $\Phi_B = 0$	$\Gamma_E = -\Delta\Phi_B/\Delta t$ $\Gamma_B = \epsilon_0\mu_0\Delta\Phi_E/\Delta t + \mu_0 I$ $\Phi_E = q/\epsilon_0$ $\Phi_B = 0$
СЛЕДСТВИЯ		електростатична индукция поляризация на диелектрици електростатична екранировка	взаимодействия на постоянни магнити и на магнити с токове	електромагнитни вълни

4.4.2. Систематизиране и обобщаване на знанията за електромагнитни явления в непрекъснати среди

Навсякъде дотук предмет на разглежданията бяха електромагнитните взаимодействия във вакуум, т.е. по същество – теорията на електромагнитното поле, тъй като по този начин особено ясно изпъква това, което ни интересува – структурата на знанията. В училищния курс обаче не по-малко внимание се отделя и на взаимодействията при наличие на непрекъснати среди – проводници, диелектрици, полупроводници, феромагнетици и пр. Именно в тези случаи се разкрива цялото разнообразие на електромагнитните явления и на тяхното изучаване се посвещава по-голямата част от учебното време, отделено за електродинамиката.

Знанията за електромагнитните явления в непрекъснати среди също подлежат на систематизация и обобщение. Целесъобразно е това да стане по същата схема, по която се систематизират и обобщават знанията за явленията във вакуум и една възможност за това, опираща се отново върху използване на подходящи таблици, бе предложена в³¹.

В случая се предлага да се използват три еднотипни таблици, в полетата на които се нанасят съответно наименованията на отделните части на електродинамиката, характерните за всяка от тях явления, законите, които са валидни в тях и т.н. По същия

начин например може да се изготви и подобна таблица за техническите приложения на различните явления и закономерности. Всяка от таблиците е разделена с вертикална линия на лява и дясна части. В лявата част са сведения за взаимодействия във вакуум, а в дясната – в непрекъснати среди. С две хоризонтални линии таблицата се разделя на три части: в най-горната са сведенията за статични полета, в средната – за стационарни полета, а в долната – за променливите полета. По такъв начин в таблицата се обособяват общо шест области, в които при нужда се отделят и техни подобласти.

По долу е представен видът на три възможни таблици от посочения вид.

Таблица
за разделите на електродинамиката



Таблица
за явленията в различните раздели на електродинамиката

Привличане и отблъскване между неподвижни заряди	Електростатична индукция, електрична поляризация ----- Взаимодействие на постоянни магнити
Явления, свързани с протичане на ток във вакуум -----	Явления, свързани с протичане на ток в метали, електролити, газове и полупроводници -----
Магнитно взаимодействие на постоянни токове	Магнитни явления в присъствие на диа-, пара- и ферромагнетици
Електромагнитна индукция, ток на отместване, електромагнитни вълни	Променливи токове ----- Пречупване, отражение, дисперсия на светлината

Таблица
за законите в различните раздели на електродинамиката

Закон на Кулон	$E = E_0/\epsilon_r$ -----
----- Закон на Ампер Закон на Био – Савар	Закони на постоянните токове ----- $B = \mu_r B_0$
Закон на Фарадей за електромагнит- ната индукция, закон на Максвел за тока на отместване	Закони за променливите токове ----- Закони за пречупване и отра- жение на светлината, $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

Във втората и третата таблици секторите могат да се допълват с други изучени явления и закони. На третата таблица секторът на стационарното електрично поле е празен, защото за това поле са валидни същите закономерности, които се проявяват и при взаимодействие на неподвижни заряди във вакуум. Празен е и секторът за магнитостатичното поле, тъй като за него не се изучават специфични закони. (В него би могъл да се помести законът на Кулон за взаимодействие на магнитни полюси.)

Както и в предходния случай, по усмотрение на учителя всяка от тези таблици следва да се попълва или в часовете, в които се изучават съответните раздели, или в края при правене на преговор и обобщение, или да се използват, като се подготвят предварително от учителя, или – по негово задание – от учениците.