Просто доказателство, че енергията на магнитното поле е пропорционална на квадрата от индукцията му[1]

В едно кратко съобщение, публикувано в това списание преди повече от 25 години, Броди[2] дискутира връзката между плътността на енергията на електричната поле и интензитета на полето, създадено от неподвижни заряди. Тук показваме приложимостта на метода и към магнитното поле.

Преди всичко ще припомним, че ако W' е енергията на произволна система в началното й състояние, а W'' – на системата в едно крайно състояние, то по определение:

(1) $$W''-W'=A\,,$$

където A е работата, извършена от **външните** сили при прехода от началното в крайното състояние. Ако в началното състояние всички безкрайно малки части на системата са безкрайно далеч една от друга, така че не взаимодействат, то $W' = 0$ и от (1) получаваме:

(2) $$W = A,$$

т.е. енергията на системата е равна на работата на външните сили при преместване на частите й от безкрайност до техните места, с други думи – на енергията, необходима за създаване на системата.

Разсъжденията на Броди се свеждат до следното. Нека с W_1 означим енергията на полето, създадено от един **малък** заряд q_1, а с W_{-1} – *съответната* енергия на полето на заряд $q_{-1} = -q_1$. Съгласно с (1) $W_1 = A$, където A е работата, необходима за събирането на частите на q_1. Съответно $W_{-1} = A'$, където A' е работата, необходима за събиране на частите на q_{-1}. Но тъй като $|q_1| = |q_{-1}|$, съответните части на всеки от зарядите в двата случая се отблъскват, силите, действащи в тези случаи са еднакви, така че $A = A'$ и следователно:

(3) $$W_1 = W_{-1}\,.$$

Да разгледаме сега два неподвижни заряда q_1. Върху всеки от зарядите на тази система действат два вида сили: една вътрешна (електростатична) сила, и една външна сила, равна по големина, но с противоположна посока на вътрешната. Тъй като зарядите са неподвижни, общата приложена на всеки заряд сила е нула. Да предположим, че в началото единият от зарядите е безкрайно далеч от другия. В това състояние енергията на системата е очевидно $2W_1$. Да означим с A_1 работата, която извършват външните сили при *безкрайно бавно* преместване на далечния заряд от безкрайност до съвместяването му с другия заряд: получаваме един заряд $2q$, енергията на полето на който означаваме с W_2. Съгласно с определението за енергия (1), енергиите на крайното и на началното състояния на системата са свързани с равенството:

(4) $$A_1 = W_2 - 2W_1\,.$$

Когато безкрайно отдалеченият заряд е не q_1, а $q_{-1} = -q_1$, съгласно с равенство (3) началната енергия на тази система би била отново $2W_1$. Ако сега преместим q_{-1} и го наложим върху q_1, работата на външните сили ще бъде $-A_1$, а тъй като двата заряда се компенсират, поле няма да се създава и енергията на крайното състояние ще бъде нула. Прилагайки отново (1), получаваме връзката:

(5) $$-A_1 = 0 - 2W_1\,.$$

---

[1] Popov C. D. *Simple proof that energy stored in a magnetic field is proportional to the magnitude of the field induction squared*, Am. J. Phys. **62**, 1148–1149, 1994.

[2] Brody H. *Simple proof that energy stored in an electric field is proportional to the magnitude of the field strengt squared*, Am. J. Phys. **36**, 914–915, 1968.

От (4) и (5) следва, че:

(6) $$W_2 = 4W_1 .$$

Да разгледаме накрая система от два безкрайно раздалечени заряда $q_2 = 2q_1$ и q_1. Енергията на тази система е $W_2 + W_1 = 4W_1 + W_1 = 5W_1$. Ако преместим q_1 и го наложим върху q_2, получаваме система със заряд $q_3 = 3q_1$, чиято енергия е W_3. Външната сила, която действа върху q_1 във всяко моментно положение при това преместване е два пъти по-голяма, отколкото при преместването му, когато и вторият заряд бе q_1, а следователно и работата й ще бъде $A_2 = 2A_1$. Следователно, по силата на (1):

(7) $$2A_1 = W_3 - 5W_1 .$$

От равенствата (4), (6) и (7) получаваме:

(8) $$W_3 = 9W_1 .$$

Следвайки Броди, можем да развием следната индуктивна процедура. Като използваме означения, аналогични на досегашните, от (1) следва, че:

(9) $$A_{n-1} = W_n - (W_{n-1} + W_1) .$$

Тъй като силите са линейни функции на зарядите, $A_{n-1} = (n-1)A_1$, така че:

$$(n-1)A_1 = W_n - (W_{n-1} + W_1) .$$

Като използваме (5), окончателно получаваме:

$$(n-1)2W_1 = W_n - (W_{n-1} + W_1),$$

така че:

$$W_n = W_{n-1} + 2(n-1)W_1 + W_1 .$$

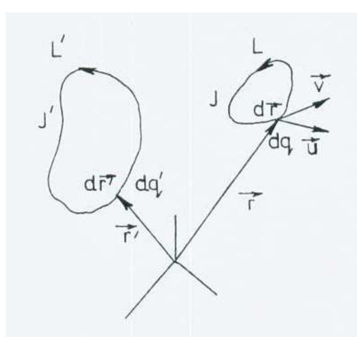
Това е една рекурентна връзка (диференчно уравнение), чието решение е:

(10) $$W_n = n^2 W_1 .$$

Тъй като $q_n = nq_1$, а интензитетът на полето, създадено от q_n е n пъти по-голям от този на полето на q_1, следва, че енергията, натрупана в електричното поле, е пропорционална на квадрата на интензитета на полето.

Не е трудно доказателството на Броди да се обобщи и за случая на произволна система неподвижни заряди[3] (т.е. не само когато размерите на областта, заета от зарядите е малка), но по интересно е да се покаже, че същият метод може да се използва и в случая а стационарно магнитно поле.

Добре известно е, че двата случая са съществено различни. Наистина, при електричните заряди единствената сила, която трябва да преодоляват външните източници при създаване на системата, е електричната сила. В другия случай, при създаване на система от стационарни токове, външните източници трябва, първо, да преодоляват магнитните сили и, второ, да разходват енергия и за подържане на токовете постоянни.



Фиг. 1.

[3] Вж. файлове 05 ED - fizichna teoriya.doc и 1993b energiya na poleto.doc.

Да разгледаме затворена крива *L’*, по която тече постоянен ток *J’* (фиг. 1), който създава магнитно поле с индукция $\vec{B}'$. Да разгледаме също бавно движеща се затворена крива *L*, по която тече постоянен ток *J*, създаващ магнитно поле с индукция $\vec{B}$. Ако отбележим с $\vec{u}$ скоростта на един зарядов елемент *dq* от *L*, дължаща се на движението на контура, а с $\vec{v}$ – скоростта на същия елемент, но дължаща се на протичането на тока *J*, може да запишем:

(10) $$d\vec{F}_m = dq\vec{u}\times\vec{B}'$$

и

(11) $$d\vec{F}^* = dq\vec{v}\times\vec{B}'$$

за магнитните сили, с които магнитното поле на тока *J’* действа върху зарядовия елемент *dq*.

Съгласно със закона на Био–Савар:

(12) $$\vec{B}'(\vec{r}) = \frac{\mu_0 J'}{4\pi}\oint_{L'} d\vec{r}'\times\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}.$$

От друга страна преместването на *L* предизвиква промени на $\vec{B}$, които от своя страна пораждат електрично поле (електромагнитна индукция!) с интензитет $\vec{E}$. Върху всеки зарядов елемент *dq’* от контура *L’* това поле действа с *електрична* сила $d\vec{F}_e = \vec{E}dq'$. Според закона на Фарадей за електромагнитната индукция:

(13) $$\oint_{L'} \vec{E}.d\vec{r}' = -\frac{d}{dt}\int_{S'} \vec{B}.d\vec{s}',$$

където *S’* е произволна повърхност, която има за контур кривата *L’*. За $\vec{B}$ законът на Био–Савар дава израза:

(14) $$\vec{B}(\vec{r}') = \frac{\mu_0 J}{4\pi}\oint_{L} d\vec{r}\times\frac{\vec{r}'-\vec{r}}{|\vec{r}'-\vec{r}|^3}.$$

За нашите разглеждания са съществени следните свойства на вътрешните сили, действащи в системата от двата контура:

I – Ако обърнем посоката на *J* (т.е. – ако заменим *J* с *–J*) и *dq* с *–dq* в съответните формули, и трите вътрешни сили сменят посоките си на противоположните. За силите $d\vec{F}_m$ и $d\vec{F}^*$ това следва пряко от (10) и (11). В същото време, съгласно с (14), заместването на *J* с *–J* обръща посоката на $\vec{B}$, и поради (13) посоките на $\vec{E}$ и $d\vec{F}_e$ също се обръщат на противоположните.

II – Ако обърнем едновременно посоките и на *J*, и на *J’* (т.е. заменим *J* с *–J*, *J’* – с *– J’*, *dq* с *–dq* и *dq’* с *–dq’*), силите не се променят. За $d\vec{F}_m$ и $d\vec{F}^*$ това отново следва от (10) и (11), тъй като съгласно (12) $\vec{B}'$ сменя посоката си на противоположната. Електричното поле $\vec{E}$ също сменя посоката си, но тъй като *dq’* е заменено с *–dq’*, електричната сила $d\vec{F}_e = \vec{E}dq'$ остава непроменена.

Ще подчертаем още веднъж,че силите $d\vec{F}_m, d\vec{F}^*$ и $d\vec{F}_e$ са *вътрешни сили*, тъй като са резултат от взаимодействията между елементите на системата. За да подържа системата в стационарно състояние, външната сила, която действа на всеки зарядов елемент (*dq* или *dq’*), трябва да уравновесява общата действаща върху него вътрешна сила. А оттук следва, че външните сили също притежават посочените две свойства.

Поради линейността на всички равенства от (10) до (14) по отношение на токовете, силите и магнитните индукции, тези две свойства остават валидни не само за линейни токове по затворени криви, но и за силите, действащи върху произволни системи от постоянни токове (тъй като всяка такава система може да се представи като съвкупност от тънки токови нишки).

След тези по същество предварителни бележки можем да преминем към пряката си цел. Да отбележим с K_1 произволна система от постоянни токове с обемна плътност $\vec{I}(\vec{r})$, които изпълват една област V. Ако a е едно реално число, с K_a означаваме системата от токове в същата област, чиято плътност е $\vec{I}_a(\vec{r}) = a\vec{I}(\vec{r})$. Нека W_1 и W_a са енергиите на магнитните полета на тези системи.

Доколкото K_1 и K_a имат еднакво пространствено разпределение на токовете, тези системи са в известен смисъл *конгруентни*. Те могат да бъдат наложени една върху друга така, че да се получи нова система K_{a+1}, която е конгруентна както с K_1, така и с K_a и в която плътността на токовете е $\vec{I}_{a+1} = \vec{I}_a + \vec{I}$. При тези означения, например, K_{-1} е системата, в която всички токове имат същата големина и противоположни посоки в сравнение със системата K_1; $K_1 + K_{-1} = K_0$ означава, че K_1 и K_{-1} могат да бъдат наложени една върху друга така, че техните токове да се компенсират и да се получи система K_0, без токове и т.н.

Ако си представим системата K_1 съставена от безброй много тънки токови нишки, според равенство (2) нейната енергия W_1 е равна на работата на външните сили при преместване на всички нишки от безкрайност до местата им. Поради свойство II обаче същите сили действат и между нишките, съставящи системата K_{-1}, от където следва, че $W_1 = W_{-1}$, т.е. равенство (4) е валидно и за случая на постоянни токове.

Когато системата се състои от две системи K_1, намиращи се безкрайно далеч една от друга, нейната енергия в това състояние е $2W_1$. Ако A_1 е работата на външните сили при преместването и обединяването им в една система K_2 с енергия W_2, от дефиницията (1) получаваме:

(15) $$A_1 = W_2 - W_1 .$$

Ако вместо K_1 и K_1 в началното състояние имаме K_1 и K_{-1}, а в крайното състояние K_0, в съответствие със свойство I работата на външните сили е $-A_1$, и, отново от (1) получаваме:

(16) $$-A_1 = 0 - 2W_1 .$$

От (15) и (16) следва $W_2 = 4W_1$ и по-нататък можем да повторим стъпка по стъпка разсъжденията, които в случая на неподвижни заряди ни доведоха до заключение, че $W_n = n^2W_1$. И тъй като равенство (14) гарантира, че $\vec{B}_n = n\vec{B}_1$, където $\vec{B}_n$ и $\vec{B}_1$ са индукциите в дадена точка на полетата, създадени от токовете съответно на K_n и K_1, заключаваме, че енергията на магнитното поле е пропорционална на квадрата на магнитната индукция $\vec{B}$.

Това доказателство заобикаля обикновените трудности, свързани с магнитната енергия, но в замяна на това получаваме само права пропорционална зависимост, вместо точен израз за плътността. Оказва се, че за тази по-скромна цел са достатъчни само такива най-общи съотношения, като дефиницията на енергия и основните свойства на магнитните сили.