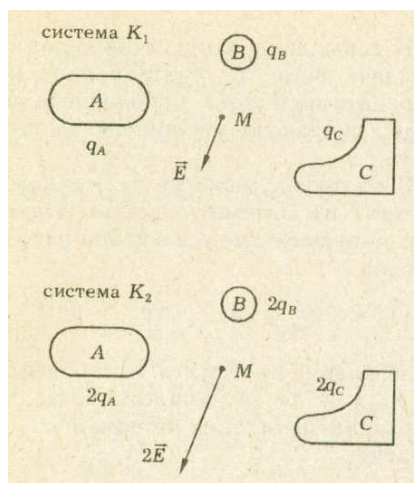


За зависимостта на енергията на полето от неговия интензитет¹

Настоящата статия представлява още един пример за евристичната сила на общите подходи: показано е как по същество с помощта само на определението за енергия, на закона на Кулон и на принципа на суперпозицията може да се изведе квадратичната зависимост между енергията на полето и силовата му характеристика (интензитет, съответно – индукция). За целта се въвежда спомагателно понятие за **конгруентност на системи** от заряди или токове.

В курсовете, предназначени за ученици с по-висока мотивираност за изучаване на физика, почти задължително присъства извод на формулата за плътност на енергията на електричното поле. Като правило, той се основава на пресмятане работата за зареждане (или разреждане) на плосък кондензатор (вж. напр. (1, с. 21). Недостатъкът на подобен извод е очевиден – разглежда се твърде конкретна система от заряди. Съществува доказателство на квадратичната зависимост между енергията на електричното поле на **точков** заряд и неговия интензитет (вж. напр. (2)). По-долу се излага едно обобщение на използвания метод за произволна система от неподвижни заряди. Обобщението не е тривиално, защото както за енергията, така и за квадрата на интензитета на полето **принципът на суперпозицията не е валиден**. Изложеното доказателство може да се предложи на ученици, които показват склонност към логически разсъждения (а и само по себе си то помага за развиване способността за провеждане на подобни разсъждения).

Нека K_1 е произволна система от неподвижни заряди, W_1 – енергията на полето на зарядите, а \vec{E}_1 – интензитетът на полето във фиксирана точка M . Нека K'_1 е системата, която се получава от K_1 чрез едновременна смяна на знаците на всички нейни заряди, W'_1 – енергията на полето на K'_1 , а \vec{E}'_1 – интензитетът на полето на K'_1 в същата т. M . Накрая, нека K_2 е система от заряди, която се получава при удвояване стойността на всеки заряд от K_1 , W_2 – нейната енергия и E_2 – интензитетът на полето ѝ в т. M .



Фиг. 1.

Ясно е, че по подобен начин, чрез умножаване на всички заряди с едно и също число n може да се получи произволна (в определен смисъл) система K_n . Тъй като пространственото разпределение на зарядите в K_1 , K'_1 , K_2 и т.н. е еднакво (фиг. 1), две системи могат да бъдат съвместени, т.е. поставени “една в друга” така, както могат да

¹ Физика, 5, 1993, с. 22–25.

бъдат съвместени две конгруентни тела. Поради тази причина системите K_n могат да се нарекат **конгруентни** системи от заряди.

Очевидно е, че от съвместяването на K_1 и K_{-1} се получава система K_0 , в която няма заряди, т.е. зарядите взаимно се компенсират, и затова навсякъде $\vec{E} = 0$. От съвместяването пък на две системи K_1 се получава K_2 и т.н.

Изводът на интересуващата ни зависимост се опира на следните четири твърдения (предпоставките в следващите след това съждения):

1. Дефиницията за енергия на система: *изменението на енергията W на една система при преход между две нейни състояния е равно на работата A на външните сили при този преход*, т.е.:

$$(1) \quad W'' - W' = A.$$

Тъй като нашата система е **статична**, на всеки етап от промяната на състоянието вътрешната и външната сила, които действат на даден заряд, се урівновесяват, а оттук следва, че двете сили извършват равни по големина, но с обратен знак работи.

2. При допълнителната уговорка, че енергията на системата е нула, когато частите ѝ са безкрайно далече една от друга и не си взаимодействат, от (1) следва, че енергията W на една статична (и стационарна) система е равна на работата на външните сили при създаването ѝ, т.е. – при пренасяне на нейните части от безкрайност (тъй като в началното състояние $W' = 0$):

$$(2) \quad W = A.$$

3. От закона на Кулон, от принципа на суперпозицията и определението за интензитет на полето следва, че ако при фиксирано положение на зарядите увеличим (или намалим) всеки от тях n пъти, в същата пропорция се променя и интензитетът на полето във всяка точка. Оттук за определените по-горе системи следва третото твърдение:

$$(3) \quad \vec{E}_2 = 2\vec{E}_1.$$

4. тъй като в закона на Кулон участва произведение от два заряда, ако всички заряди едновременно сменят знаците си, електричните сили, които действат на зарядите от системата не се променят, т.е.

$$(4) \quad \vec{F}_1 = \vec{F}'_1,$$

където \vec{F}_1 е електричната сила, която действа на един заряд в K_1 , а \vec{F}'_1 – съответната сила в K'_1 .

Първото следствие, което може да се извлече от (2) и (4) е, че енергиите на K_1 и K'_1 са равни:

$$(5) \quad W_1 = W'_1.$$

Наистина, щом при смяна на знаците на всички заряди силите не се променят, работата при създаване на K_1 е равна на работата при създаване на K'_1 .

Второ следствие се получава чрез разглеждане на една система, която се състои от K_1 и K'_1 , но в специалния случай, когато K'_1 е безкрайно далече от K_1 . В този случай двете системи не взаимодействат и енергията W' на общата система е сбор от енергиите на K_1 и K'_1 . По силата на (5) за W' получаваме:

$$(6) \quad W' = W_1 + W'_1 = 2W_1.$$

Да разгледаме сега процеса, при който K'_1 , тръгвайки от безкрайност, се съвместява с K_1 . Съгласно с казаното по-горе, в края на този процес поле няма и следователно:

$$(7) \quad W'' = 0.$$

От (1), (6) и (7) получаваме третото следствие: работата на външните сили при описания процес е:

$$(8) \quad A = 2W_1.$$

Накрая, да разгледаме система, състояща се от две еднакви системи K_1 , намиращи се безкрайно далече една от друга. Енергията на това начално състояние отново се описва с (6). Ако преместим едната от системите K_1 от безкрайност до съвместяването ѝ с другата система K_1 , получаваме система K_2 и следователно енергията на крайното състояние е:

$$(9) \quad W'' = W_2.$$

Тъй като по силата на (4) при този процес се извършва същата работа, както при разгледаното по-горе съвместяване на K_1 и K_1' , от (1), (6), (8) и (9) следва:

$$(10) \quad W_2 = W' + A = 2W_1 + 2W_1 = 4W_1.$$

По подобен начин може да се разгледа системата, съставена от безкрайно раздалечени системи K_2 и K_1 , чиято енергия, по силата на (10) е:

$$(11) \quad W' = W_2 + W_1 = 5W_1.$$

Ако преместим K_1 до съвместяването ѝ с K_2 , получаваме система K_3 с енергия W_3 , в която източниците – зарядите, са равни на утроените заряди на K_1 . При това преместване по силата на (3) върху всеки от зарядите на K_1 ще действа сила, два пъти по-голяма от съответната сила, действаща в случая, когато K_1 се доближаваше към K_1' . Следователно и работата сега ще бъде два пъти по-голяма от (8), т.е. $4W_1$. И отново, както в предишния случай, от (1) следва:

$$(12) \quad W_3 = 5W_1 + 4W_1 = 9W_1.$$

И така: двукратно увеличение на зарядите води до четворно увеличение на енергията на полето, тройно увеличение на зарядите – до деветкратно увеличение на енергията.

По-нататък може да се приложи методът на математическата индукция: допускаме, че е доказано равенството:

$$(13) \quad W_{n-1} = (n-1)^2 W_1.$$

Разглеждаме система, съставена от K_{n-1} и K_1 , в началото – безкрайно раздалечени, така че началната ѝ енергия е:

$$(14) \quad W' = W_{n-1} + W_1.$$

При преместването на K_1 от безкрайност до съвместяването ѝ с K_{n-1} , на всеки заряд от K_1 действа сила $(n-1)$ пъти по-голяма, отколкото когато K_1 се доближава до K_1' и следователно работата на външните сили (вж. (8)) в случая ще бъде:

$$(15) \quad A = 2(n-1)W_1.$$

Тъй като в края на преместването се получава система K_n , енергията на крайното състояние е:

$$(16) \quad W'' = W_n$$

и от (1), (13), (14), (15) и (16) получаваме:

$$W_n = W_{n-1} + W_1 + A = [(n-1)^2 + 1 + 2(n-1)]W_1$$

или:

$$(17) \quad W_n = n^2 W_1.$$

И така, когато зарядите се увеличат n пъти, енергията на системата се увеличава n^2 пъти. Но по силата на третото твърдение n -кратно увеличение на зарядите е свързано със също n -кратно увеличение на интензитета на полето във всяка точка. И ако вярваме, че енергията на системата е разпределена в полето ѝ, следва да заключим, че

плътността на енергията (т.е. количеството енергия в единица обем) е квадратична функция на интензитета на полето:

$$(18) \quad W \sim \vec{E}^2,$$

– което трябваше да се докаже.

Интересно е да се отбележи, че същият подход може да се приложи и за намиране на зависимостта между енергията на магнитното поле на система от постоянни токове и индукцията на полето. В този случай твърденията (3) и (4) трябва да се заменят със следните:

$$(3') \quad \text{От закона на Био – Савар (1, с. 31)} \Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} (I' \Delta l') \frac{\sin \varphi}{r^2} \text{ и от принципа на}$$

суперпозицията следва, че n -кратно изменение на токовете води до n -кратно изменение на индукцията във всяка точка на полето.

(4') Тъй като в закона на Ампер (вж. напр. (3)):

$$\Delta^2 F_m = \frac{\mu_0}{4\pi} (I \Delta \vec{l}) \times \frac{(I' \Delta \vec{l}') \times \vec{r}_0}{r^2}$$

за магнитната сила $\Delta^2 \vec{F}_m$, с която си взаимодействат два постоянни токови елемента $(I \Delta \vec{l})$ и $I' \Delta \vec{l}'$, фигурира произведението от два тока, едновременната смяна на посоките на всички токове не променя магнитните сили, действащи на токовете елементи от системата.

(Законът на Ампер в използваната форма не се изучава в училище. Формулираното под номер 4' твърдение обаче следва и от двете правила на дясната ръка, които се изучават: правилото за посоката на магнитната сила, което се изучава в 9. клас заедно със закона на Ампер, и правилото за посоката на магнитната индукция, което се изучава в 11. клас заедно със закона на Био – Савар.

За да се достигне до зависимостта $W_m \sim \vec{B}^2$, следва да се повторят разсъжденията, довели до формула (13), като сега K_1 е определена система от постоянни токове; K_1' – системата, която се получава от K_1 чрез обръщане на посоките на всички токове, а K_2 – системата, в която текат токове, два пъти по-големи от токовете в K_1 .

Литература

1. Попов Хр., Т. Сугарев, Др. Иванов *Физика за 11. клас. Електродинамика*, С., Просвета, 1992.
2. Brody H. *A simple proof that energy stored in an electric field is proportional to the magnitude of the field strength squared*, Am. J. of Phys., 36, 1968, p. 914.
3. Попов Хр. *Фундаментални експерименти и фундаментални експериментални закони в електродинамиката*, Физика, 6, 1992, с.24.