

Следствия от уравненията на Максвел (2)¹

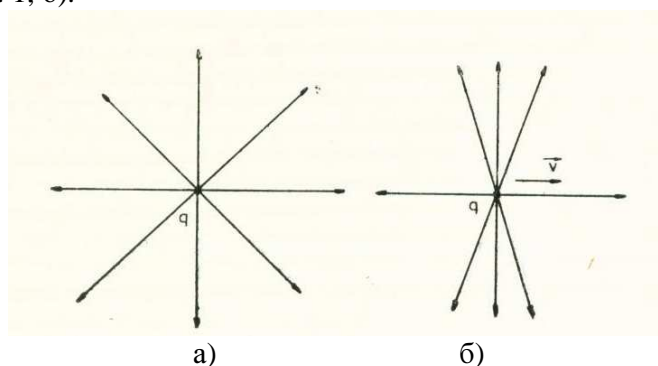
Излъчване на ускорено движещ се точков заряд

Едно от най-важните следствия от уравненията на Максвел и фактът, че всеки ускорено движещ се заряд излъчва в пространството електромагнитна енергия. Разбира се, общото и строго разглеждане на въпроса изисква използване на недостъпен за учениците математичен апарат. В методиката на обучение по физика са известни редица разработки (вж. напр. (1)), които, при съответните опростявания, успяват да обхванат на едно достъпно по разбираемост равнище най-съществените черти на процесите както в качествено, така и в количествено отношение. В учебната литература въпросът за излъчване на ускорено движещ се заряд е разработен относително пълно в (2, с. 57), а на качествено равнище – и у нас (вж. (3, с. 47), (4, с. 80)). Тези примери показват, че съществуват подходящо адаптирани изложения на проблема и че те наистина може да се използват в курсовете за разширено изучаване на физиката (напр. в профилираните паралелки в 11 клас, или, и най-вече – с учениците, показващи най-задълбочен интерес към физиката).

По-долу излагаме една схема, която е по-близо да подхода, използван в (б) и (3), отколкото до този на (1) и (2), защото последните разглеждат случая на равнозакъснително движещ се заряд, който в известен смисъл не е най-естественият. За да се улесни подборът на подходящи методически средства при преподаване на материала, ударението се поставя върху ясното разграничаване, първо, на отделните предпоставки, от които се извеждат следствията и, второ, на елементите и етапите в разсъжденията, които водят до тези следствия.

Предпоставки, върху които се градят изводите

Ключов момент в разглежданията е представата за характера на електричното поле на равномерно движещ се точков заряд q . Въпросът не е елементарен и не случайно в повечето разработки той само се маркира, без да се търси задълбочаване в отговора му. Всъщност, известно е, че докато полето на неподвижен заряд притежава сферична симетрия (фиг. 1, а), то за равномерно движещ се със скорост \vec{v} заряд, съгласно със специалната теория на относителността (СТО), то е деформирано в посока на движението, като остава само осевата симетрия спрямо правата, по която става движението (фиг. 1, б).



Фиг. 1.

Деформацията на картината на силовите линии обаче е релативистичен ефект, който при малки спрямо скоростта c на светлината във вакуум скорости на движение може да се пренебрегне, така че картината от фиг. 1, а може да се използва и когато е изпълнено условието $v \ll c$.

¹ Физика, 1991, 1, с.13–19.

Елементи на СТО се изучават в 11. клас, но в тях не се включват формулите за трансформиране на компонентите на електричното поле \vec{E} при преход от една инерциална отправна система в друга. Поради това горепосочената аргументация не може да се използва. Затова най-подходящо е да се позовем на СТО като гарант на това, че

при равномерно движение със скорост $v \ll c$ електричното поле на точков заряд q е същото, като на неподвижен заряд.

Разбира се, не трябва да се забравя, че цялата картина от фиг. 1, б се пренася в пространството със скорост v заедно със заряда. Бихме могли да кажем още, че в този случай полето е неподвижно свързано със заряда, който го създава.

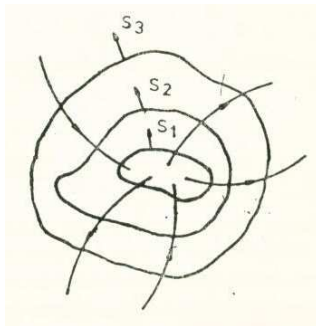
Това е всъщност и **първото** изходно твърдение, първата предпоставка, върху която се градят по-нататъшните разсъждения.

Второто изходно твърдение е, че **промените на електромагнитното поле се разпространяват в пространството с крайна скорост, която за вакуум се определя от формулата на Максвел $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$.**

Накрая, **третото** изходно твърдение е едно от уравненията на Максвел, което в глобалната си форма се нарича още *теорема на Гаус*, според която **потокът Φ_E на електричното поле през произволна затворена повърхност S е равен на деления с ϵ_0 електричен заряд q_S , заграден от повърхността –**

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} q_S.$$

Всъщност, ние ще използваме едно геометрично следствие от тази теорема: ако $S_1, S_2, S_3 \dots$ са затворени, вложени една в друга затворени повърхности (фиг. 2), между които няма електрични заряди (т.е. заряд има само в най-вътрешната), потоците на електричното поле през всяка от тях са равни: $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \dots$, което означава, че се пробождат от един и същ брой силови линии.



Фиг. 2.

Учениците по-добре познават друга, еквивалентна формулировка на третото твърдение – че

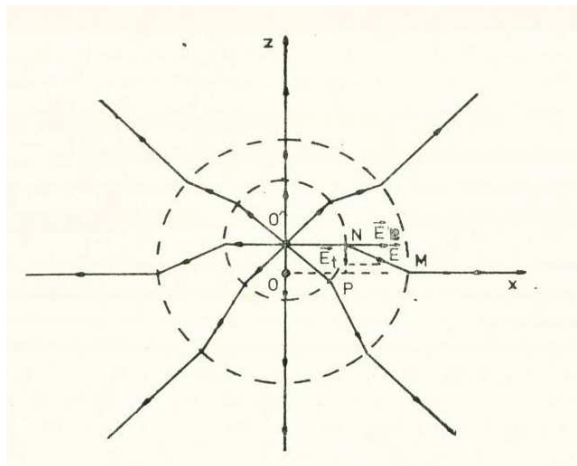
електричните силови линии в празното пространство са непрекъснати криви, те започват и завършват само върху електрични заряди.

Тези три предпоставки са достатъчни, за да направим интересуващите ни изводи.

Характер на полето на ускорено движещ се заряд

Да разгледаме електричното поле на точков заряд q , който в момент $t = 0$ е неподвижен в т. O , след което да **кратък** интервал време τ се движи равноускорително с ускорение \vec{a} по посока на оста Oz (фиг. 3) и накрая, след момента $t = \tau$ продължава движението си равномерно, праволинейно, с придобитата при ускоряването скорост

$v = a\tau$. Уговорката, че интервалът τ е кратък, гарантира изпълнението на неравенството $v \ll c$.



Фиг. 3.

Ние се интересуваме от пространственото разпределение на полето в един момент $t = \tau + T$, т.е. след като зарядът се е движил време T равномерно със скорост v .

Като наложим допълнителното условие $\tau \ll T$, можем да бъдем сигурни, че пътят $vT = a\tau T$, изминат от заряда при равномерното му движение, е много по-голям от пътя $\frac{1}{2}a\tau^2$, изминат равноускорително. Поради тази причина на фиг. 3 отсечката с дължина $\frac{1}{2}a\tau^2$ е пренебрегната спрямо vT и затова разстоянието OO' между началното (в момента $t = 0$) и крайното (в момента $t = \tau + T$) положения на заряда е отбелязано с vT , вместо с $vT + \frac{1}{2}a\tau^2$.

От фиг. 3 се вижда, че в интересувания ни момент $t = \tau + T$ пространството се разделя на три подобласти:

– Първата подобласт обхваща пространството извън сферата с център в т. O и с радиус $c(\tau + T)$ – тук полето е все още електростатично – поради крайната скорост на разпространение на промените те не са стигнали до точките от тази подобласт и затова то, полето, е като на неподвижен точков заряд q , разположен в т. O .

– Втората подобласт включва точките от вътрешността на сферата с център в т. O' и с радиус cT . В тази сфера, в съответствие с втората предпоставка, вече се е установило полето на равномерно движещ се заряд, а то, съгласно с първата предпоставка, е като на неподвижен точков заряд.

– Третата подобласт е затворена между двете горепосочени сфери. Това е пространството, в което става преобразуване, преход от поле на неподвижен в т. O заряд, към поле на равномерно движещ се заряд. За определяне на характера на електричното поле в тази област ще използваме третата предпоставка: тъй като в този подобласт няма електрични заряди, електричните силови линии трябва да бъдат непрекъснати линии, т.е. сферите трябва да се пробождат от едни и същи силови линии. Това изискване е спазено на фиг. 3 – всяка линия (с изключение на двете, които са в направление на движението) търпи “пречупване” върху повърхностите на сферите. От фигурата се вижда и една друга, съществена особеност на полето в пространството между сферите: там то *не е радиално*, както в първите две подобласти, а има и напречна (трансверзална) съставяща \vec{E}_t : $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_t$.

Определяне на напречната съставяща на полето

Наша непосредствена цел сега е да определим как големината на напречната компонента \vec{E}_t в преходната (третата) област зависи от разстоянието, от ускорението и от времето за ускоряване. За простота ще разглеждаме полето в т. N , която се намира на разстояние $r = cT$ от т. O' , а посоката от т. O' към т. N е перпендикулярна на ускорението. От подобие на триъгълника NMP и триъгълника, образуван от трите вектора \vec{E} , \vec{E}_r и \vec{E}_t , се вижда, че:

$$\frac{E_t}{E_r} = \frac{|NP|}{|PM|}, \quad \text{т.е.} \quad E_t = \frac{|NP|}{|PM|} E_r.$$

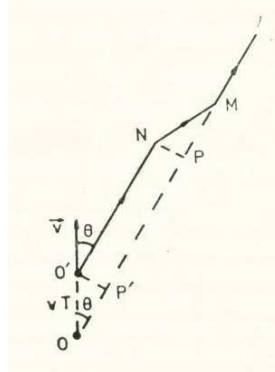
Тъй като $|NP| = |OO'|$, то $|NP| = vT$. От друга страна $|PM|$ е разстоянието, което се изминава със скорост c за време t , т.е. $|PM| = ct$. Тогава, като *предположим*, че върху повърхността на малката сфера радиалната съставяща на полето се описва със закона на Кулон (предположение, свързано с първата предпоставка), то:

$$E_t = \frac{vT}{ct} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{aT}{c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{aT}{c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Тъй като с $r = |O'N|$ е означено разстоянието от моментното положение на заряда до точката на наблюдение чрез равенството $r = cT$ от горния израз може да се елиминира интервалът T и по такъв начин за E_t получаваме окончателно:

$$E_t = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}.$$

Тези разглеждания са за характера на полето в равнината, съдържаща заряда и перпендикулярна на ускорението му. Въпреки, че и полученият резултат дава достатъчно материал за по-нататъшни заключения, ще разгледаме и по-общия случай – когато ъгълът между посоките на ускорението и към точката на наблюдение е произволен – θ , а не както до сега 90° . За целта ще използваме фиг. 4. От нея се вижда,



Фиг. 4.

че единствената разлика от предишния случай се свежда до това, че сега вместо равенството $|NP| = |OO'|$ имаме $|NP| = |O'P'| = |OO'| \sin \theta$. Следователно, като повторим всички разсъждения, ще получим:

$$(1) \quad E_t = \frac{qa \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}.$$

Тази формула съдържа най-важния резултат и по същество всичко, които следва по-нататък, са само нейни коментари и следствия.

Първото заключение, което следва от формула (1) е, че ускоряването на заряда има за резултат поява на електрично поле \vec{E}_t , което е перпендикулярно на посоката от заряда към точката на наблюдение. Такива полета понякога се наричат **напречни** полета. Това е ново явление, тъй като до сега сме разглеждали само електрични полета на неподвижни или на равномерно движещи се заряди, които са **радиални**.

Второ – създаденото напречно поле намалява с отдалечаване от източника си, но намалява относително бавно: докато радиалната съставяща намалява като $\frac{1}{r^2}$, напречната съставяща намалява обратно пропорционално **само на първата степен** на разстоянието – като $\frac{1}{r}$. И електричните, и магнитните статични или стационарни полета, изучавани до сега, са обратно пропорционални на r^2 , т.е. те намаляват по-бързо. Тъй като радиалната съставяща се описва със закона на Кулон ($E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$), от него и от (1) получаваме:

$$(2) \quad \frac{E_r}{E_t} = \frac{c^2}{r a \sin \theta} .$$

Далече от източника, при големи стойности на r (т.е. при $r \rightarrow \infty$) това отношение е много малко, радиалната съставяща е пренебрежимо малка спрямо напречната. Следователно на голямо разстояние от ускорения заряд може да се смята, че електричното поле е чисто напречно, т.е. – перпендикулярно на посоката, в която се разпространява. Това е отговорът на въпроса, който остана без отговор в първата част на статията: как може да се получи променливо електрично поле, което е перпендикулярно към посоката, в която се разпространяват промените. А като отчетем, че според казаното там такова поле е неразделно свързано с перпендикулярно нему магнитно поле, можем да формулираме като първо важно следствие от направените разглеждания твърдението:

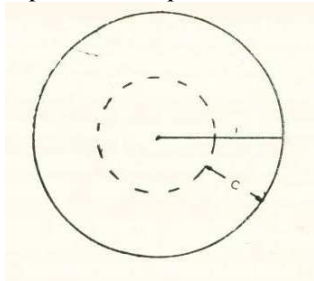
Далече от ускорено движещ се заряд съществува напречно електромагнитно поле, чиито характеристики \vec{E} и \vec{B} са правопрпорционални на ускорението на заряда, на синуса от ъгъла между ускорението и посоката към точката на наблюдение и са обратно пропорционални на разстоянието до заряда.

Дотук нашите разглеждания имаха в известен смисъл кинематичен характер (в тях се занимавахме повече с разстояния, скорости и ускорения). Да погледнем обаче същите процеси от друга, динамична гледна точка, т.е. да анализираме какви сили действат, каква работа и от кого се извършва, какви преобразования на енергията се осъществяват.

Съгласно с първия принцип на динамиката, за да се движи зарядът равномерно и праволинейно, не е необходимо да му действа сила. Заедно със заряда в този случай се движи и създаденото от него електромагнитно поле, но и двата процеса (преместването на заряда и преместването на полето) не са свързани с преобразования на енергията: няма сила, която да извършва работа, не се променя кинетичната енергия на заряда, не се променя и енергията на полето.

В интервала време τ , през който ускоряваме заряда, върху него действа определена сила. Тази сила извършва определена механична работа за сметка на енергията на източника на силата. Тъй като зарядът непременно притежава маса (това е едно от свойствата на фундаменталната величина *електричен заряд* – вж. напр. (3)), част от тази работа отива за увеличаване на кинетичната енергия на частицата.

Видяхме обаче, че в резултат от ускоряването, в пространството се появява напречно електромагнитно поле, което се отдалечава от заряда със скорост c и чиито компоненти са пропорционални на $\frac{1}{r}$. Тъй като и плътността на енергията на електричното поле, и плътността на енергията на магнитното поле са пропорционални на квадратите на техните характеристики ($w_e = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$ и $w_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2$), то общата плътност на електромагнитната енергия в напречното поле – $w_{em} = w_e + w_m$ ще бъде пропорционална на $\frac{1}{r^2}$. Понеже скоростта на пренасяне на промените на полето и на носената от него енергия е c , през единица площ, перпендикулярна на посоката на пренасяне на енергията, за единица време преминава енергия cw_{em} . Тогава, ако си представим една сфера с център в заряда и радиус r , за единица време през нея ще премине енергия $(4\pi r^2) cw_{em}$ (т.е. – цялата енергия от сферичния слой с дебелина c – фиг. 5). Тъй като $w_{em} \sim \frac{1}{r^2}$, поради съкращаването на r^2 се оказва, че количеството енергия, пресичащо сферата за определено време всъщност не зависи от радиуса ѝ. А



Фиг. 5.

това означава, че променливото електромагнитно поле пренася електромагнитна енергия, която никъде не се натрупва. Така стигаме до второто важно следствие от направените разглеждания:

Ускорено движещият се заряд излъчва в околното пространство електромагнитна енергия.

По този начин част от енергията на източника на ускоряващата сила, посредством извършената от нея работа, се превръща в енергия на полето, което се отдалечава от източника със скорост c .

Грубо казано, разглежданите процеси може да се разглеждат по следния начин: един равномерно движещ се (или неподвижен) заряд създава електрично поле и магнитно поле, които са тясно свързани с него и които намаляват бързо (като $1/r^2$) с отдалечаване от заряда. При ускоряване на заряда възниква поле, което “се откъсва” от него и, самоподдържайки се, се отдалечава от него. Самоподдържането се изразява в това, че промените на електричното поле създават магнитно поле, чиито промени, обратно, пораждат електрично поле и т.н. В резултат от този процес несвързаното пряко със заряда електромагнитно поле намалява с отдалечаването от него по-бавно – само като $1/r$.

На обстоятелството, че при ускоряване на заряд част от работата на ускоряващата сила отива за излъчване на електромагнитна енергия, може да се гледа и от друга страна. Да си представим, че наблюдаваме две неподвижни частици с равни маси, но едната заредена, а другата – незаредена. Въпреки че масите им са равни, за да им придадем **еднакви** ускорения, трябва да им действаме с **различни** по големина

сили. Наистина, щом ускоренията са еднакви, за даден интервал време частиците ще придобият еднакви скорости, т.е. еднакви кинетични енергии. Силата, която ускорява заредената частица обаче трябва да извърши по-голяма работа, защото част от тази работа се преобразува и излъчва във вид на електромагнитна енергия. Затова и тази сила трябва да бъде по-голяма. Ефективно заредената частица като че ли има по-голяма маса. Ясно е, че тази допълнителна маса се дължи на излъчената енергия – казва се, че тази маса има електромагнитен характер или електромагнитен произход. Известни са опитите (неуспешни) от края на 19. и началото на 20. век за разглеждане на цялата маса на заредените частици (по-специално – на електрона) като електромагнитна маса.

Съдържащият се във формула (1) резултат може да се използва като основа за обясняване на редица важни закономерности при излъчване на електромагнитна енергия. Преди всичко, ако движението на ускорения заряд е периодично (напр. ако той трепти около едно равновесно положение, или ако се движи равномерно по окръжност), то и характеристиките на създаденото напречно електромагнитно поле ще се променят с времето периодично и ще имат характера на вълна:

Периодично движещ се заряд излъчва електромагнитна вълна.

Когато направлението на ускорението е постоянно и $\theta = 0^\circ$ или $\theta = 180^\circ$, то и в двата случая $\sin \theta = 0$ и от формула (1) следва, че в направление на ускорението зарядът не излъчва енергия. Тъй като $\sin 90^\circ = 1$, от същата формула следва, че максимално количество енергия се излъчва в равнината, перпендикулярна на ускорението.

Ако зарядът трепти хармонично, например отместването му от равновесното положение се описва с израза $x = A \cos \omega t$, то ускорението му е $a = -\omega^2 x$, т.е. $a \sim \omega^2 \sim v^2$, където v е честотата на трептене. Тъй като според формула (1) $E_t \sim a$, а излъчената за единица време енергия, както видяхме, е пропорционална на E_t^2 , то мощността на излъчването ще бъде пропорционална на v^4 , т.е. на четвъртата степен от честотата на трептене.

По такъв начин качествено обясняваме особеностите на излъчването на една диполна антена. Малко по-детайлни разглеждания могат да обяснят и поляризацияните характеристики на излъчената вълна.

Всичко това показва, че без да се излиза извън кръга на достъпните за ученици в 11. клас средства могат да се обосноват редица важни следствия от уравненията на Максвел, свързани с излъчването на електромагнитни вълни. По този начин освен че се дава отговор на редица важни за практиката въпроси, се допринася и за доизграждането й като една типична физична теория със своя основа, ядро и следствия.

Литература

1. Фабрикант В. А. *О классической теории излучения*, Физика в школе, 1, 1974.
2. Кабардин О. Ф. и др. *Факультативный курс физики, 10. класс*, М., Просвещение, 1979.
3. Попов Хр. и др. *Физика за 10. клас на ЕСПУ*, С., Народна просвета, 1983.
4. Борисов М. и др. *Физика за 11. клас*, С., Народна просвета, 1975.
5. Попов Хр. *Основи на електродинамиката*, С., МНП, 1989.
6. Суорц Кл. Э. *Необъяснимая физика объяснимых явлений*, т. 2, М., Наука, 1987.