Следствия от уравненията на Максуел (I)[1]

Съвременните задачи пред обучението по физика изискват неговата диференциация (1, 2). Независимо по какъв начин и в какви форми ще се осъществи това е ясно, че за учениците, които ще изучават физика в 11. и в 12. клас ще се оформи един курс за по-задълбочено запознаване с физиката, в който основен принцип за подбор и и организация на учебното съдържание отново ще бъде генерализацията на знанията около фундаменталните физични теории (2). Класическата електродинамика е една от тези теории. Доколкото електромагнитните явления се изучаван при общозадължителната подготовка в 9. клас, възниква въпросът в каква насока знанията за тези явления ще се надстрояват и задълбочават в 11. клас. Смятаме, че в съответствие с идеята за генерализация на знанията това следва да стане чрез излагане на електродинамиката като типични физична теория, т.е. чрез разкриване в явен вид на нейната основа, ядро и следствия (3). Подобна програма за действие представя относително най-благоприятни възможности както за разширяване и задълбочаване, така и за систематизиране и обобщаване на знанията от общозадължителната подготовка.

Въпросите за изграждани на основите на електродинамиката и за осмисляне на физическата същност на нейното ядро – уравненията на Максуел, са разработвани у нас както в методическата, така и в учебната литература (4, 5, 6). Въпросът за следствията от уравненията на Максуел обаче, въпреки че в чуждестранната литература е изяснен отдавна и то на различни равнища, у нас, поне в последните години не е привличал достатъчно внимание. Именно това обстоятелство, както и предстоящото изучаване на електромагнитните явления на по-високо равнище в 11. клас, правят актуално обсъждането на тези следствия както в съдържателно, така и в процесуално-методическо отношение.

По-долу се спираме само на съдържателната страна на проблема, като систематизираме онези знания, които биха могли да залегнат в учебния материал. При това, измежду многобройните следствия от уравненията на Максуел се спираме само на три, които са важни от принципна гледна точка: на извода на връзката между $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в една плоска електромагнитна вълна, на извода на формулата на Максуел за скоростта на разпространение на промените на електромагнитното поле (в настоящата I част) и на излъчването на електромагнитна енергия от един ускорено движещ се заряд (във II част). В първите два случая става дума за следствия, чрез които в края на краищата се обяснява едно познато явление (като се прехвърля мост към оптиката), а в последния, трети случай се предсказва ново явление.

Уравнения на Максуел

Преди разглеждане на следствията, за подобряване на достъпността, първо ще припомним вида и смисъла на уравненията на Максуел в тяхната *глобална* форма, така, както например са изложени в (3) – (6), тъй като тя е най-подходяща за разглежданията, които могат да се правят на равнището, достижимо в часовете за свободноизбираема подготовка в училище. За разбиране на техния смисъл е необходимо да се познават две понятия, две *глобални* величини, който могат да се дефинират за всяко векторно поле с помощта на *локалните* характеристики на полето. Електромагнитното поле има две локални характеристики – интензитета $\vec{E}$ на електричното и индукцията $\vec{B}$ на магнитното поле. Чрез тях могат да се въведат глобалните величини **поток** Φ на полето през дадена повърхност и **циркулация** Γ на полето по дадена крива.

[1] Физика, 1990, **6**, с. 25–31.

С величината поток учениците са запознати на второ равнище в 9. клас, където се въвежда поток на магнитната индукция Φ_B , с чиято помощ се формулира законът на Фарадей за електромагнитната индукция. Тази величина притежава ясен геометричен смисъл: потокът Φ на едно векторно поле през дадена повърхност е пропорционален на броя на начертаните векторни (в случая – силови или индукционни) линии, които пробождат повърхността.

В общия случай намирането на потока на едно поле се свежда до пресмятане на повърхнинен интеграл. В училище обаче обикновено се налага да пресмятаме потоци в два много частни случая: първо, когато полето е тангенциално към повърхността – тогава потокът му очевидно е нула, и, второ – когато големината на полето е константа, а посоката му е перпендикулярна към повърхността. В този втори случай потокът е равен на произведението от големината на полето и площта на повърхността, като в случая, когато векторните линии я пробождат от лицевата към опаката страна, това произведение се взема със знак минус.

Втората глобална величина, циркулацията на полето по дадена крива, се дефинира, като кривата мислено се раздели на голям брой малки елементи, дължината на всеки елемент се умножи с проекцията на полето върху него и получените произведения се съберат. По същество става дума за пресмятане на криволинеен интеграл. В училище обаче обикновено се налага пресмятане на циркулация в два много частни случая: първо, когато полето е перпендикулярно към всеки линеен елемент на кривата – тогава циркулацията очевидно е нула, и, второ – когато големината на полето е константа, а посоката му е допирателна към кривата във всяка нейна точка. В този последния случай циркулацията е равна на произведението от големината на полето и дължината на кривата, като в случай, че посоката на полето е противоположна на ориентацията на кривата, това произведение се взема със знак минус.

Когато полето е силово, циркулацията му по дадена крива има ясен физичен смисъл: тя е пропорционална на работата, която извършва полето при преместване по кривата. (когато говорим за електрично поле, става дума за преместване на точков заряд, а когато говорим за магнитно поле – за преместване на полюс на постоянен магнит.)

Всъщност, макар и не назована с този термин, учениците познават величината циркулация от общообразователния минимум. Така например електродвижещото напрежение ε на един източник на ток не е нищо друго, освен циркулация на електродвижещите сили по крива, започваща от отрицателния и завършваща върху положителния електрод на източника. Друг пример е напрежението между две точки в електростатичното поле: по същество то представлява циркулация Γ_E на интензитета на полето по произволна крива, съединяваща началната и крайната точки. (Консервативността на полето гарантира независимост на циркулацията от формата на кривата.)

Тези примери показват как по аналогичен начин могат да се въведат още две глобални величини, необходими за формулирането на уравненията на Максуел: величината поток на електричното поле Φ_E през една повърхност, и циркулация на магнитното поле Γ_B по дадена крива.

С припомняне на тези сведения фактически подготвихме математичния апарат, необходим за формулиране уравненията на Максуел в тяхната глобална форма. При това ще записваме уравненията в традиционния вид: в лявата страна величините, свързани с характеристиките на полето (циркулации и потоци), а в дясната – източниците на съответното поле, величините, които в много случаи смятаме за зададени, за известни.

Веднага трябва да подчертаем, че всичко, казано по-долу, че отнася за електромагнитното поле **във вакуум**, т.е. изключва се присъствието на всякакви диелектрици, проводници, феромагнетици и прочее материални среди.

Първите две от уравненията на Максуел свързват потоците Φ_E и Φ_B на полетата $\vec{E}$ и $\vec{B}$ през една произволна повърхност S с техните циркулации Γ_E и Γ_B по затворения контур L на тази повърхност. Те имат следния вид:

(1) $$\Gamma_E = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$$ – закон на Фарадей за електромагнитното индукция

(2) $$\Gamma_B = \varepsilon_0\mu_0\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} + \mu_0 I$$ – обобщен закон на Ампер или на Био–Савар,

където I е токът, който пробожда повърхността S.

Уравнение (1) показва, че промените на магнитното поле с времето (т.е. $\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$) са източници на електрично поле, но това електрично поле е вихрово, защото циркулацията му по затворена крива не е нула. Уравнение (2) показва, че магнитното поле има два вида източници: промените на електричното поле с времето ($\frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t}$), т.е. токът на отместване, и токът I, дължащ се на движението на електрични заряди. И двата тези източника създават вихрово магнитно поле.

Втората двойка уравнения на Максуел свързва потоците Φ_E и Φ_B на полетата $\vec{E}$ и $\vec{B}$ през една произволна, но вече **затворена** повърхност S (т.е. S няма контур), с другия тип източници – със скаларните източници на полето. Те имат следния вид:

(3) $$\Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}q$$ – закон или теорема на Гаус

(4) $$\Phi_B = 0,$$

където q е заградeният от повърхността S електричен заряд.

Уравнение (3) показва, че електричните заряди са източници на електрично поле, което в отсъствие на променливо магнитно поле (т.е. при $\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = 0$) е консервативно, може да се характеризира със скаларен потенциал. По аналогичен начин уравнение (4) показва, че магнитното поле няма скаларни източници, няма магнитни заряди, и затова магнитното поле (в съответствие с (2)) никога не е консервативно.

След тези по същество подготвителни сведения, можем да преминем по същество към следствията от уравненията на Максуел.

Връзка между $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в плоска електромагнитна вълна

Свойството на електромагнитното поле да се **самоподдържа**, т.е. фактът, че промените на електричното поле пораждат магнитно поле, което, от своя страна, променяйки се, поражда електрични поле и т.н., се коментира на качествено равнище още в общозадължителната подготовка (8, с.209). По-пълно и далеч по-строго разглеждане на въпроса за разпространение на промените на полето и извод на формулата за тяхната скорост може да се намери например в (9, с. 82), (10, с. 729), (7, с 305) и в (12, с. 75–79).

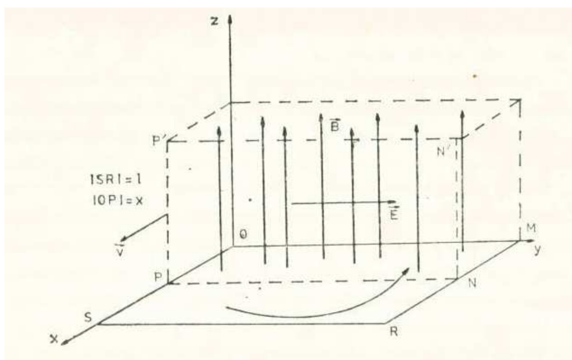
Едно кратко изложение на подхода, който по същество е един и същ у всички автори и чиито корени се крият някъде в началото на 20. век, изглежда по следния начин.

Преди всичко трябва да се има предвид, че **когато се говори за електромагнитна вълна, обикновено се има предвид променливо електромагнитно поле в пространството извън неговите източници**, т.е. там, където няма заряди и токове (q = 0 и I = 0). Затова за електромагнитната вълна първите две от уравненията на Максуел имат вида:

(1а) $$\Gamma_E = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$$ закон на Фарадей

(2а) $$\Gamma_B = \varepsilon_0\mu_0\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$$ закон на Максуел.

Нека сега разгледаме процес, при който по оста Ox на една координатна система се разпространява със скорост $\vec{v}$ хомогенно магнитно поле, чиято индукция $\vec{B}$ има посоката на оста Oz (фиг. 1). Нека освен това в определен момент границата на полето е достигнала равнината $PNN'P'$, която отстои на разстояние $x = |OP|$ от началото на координатната система. На фигурата е изобразена само частта на полето, ограничена между отсечките OP и MN.



Фиг. 1.

Всъщност, полето се простира неограничено в двете посоки на осите Oy и Oz. (Отговор на въпроса как може да се получи подобно поле ще бъде даден по-късно.)

Тъй като в описаната ситуация магнитният поток, пробождащ правоъгълника $OSRM$ се променя с времето, в пространството се поражда електрично поле с интензитет $\vec{E}$, чиято посока се определя от правилото на Ленц. Да приложим уравнение (1а) за повърхността на правоъгълника $OSRM$, като (съгласно с уговорката, която се прави, за да бъде изпълнено правилото на Ленц), обхождането на контура на правоъгълника става в посоката, указана на фиг. 1: от т. O последователно към точките S, R и M.Тъй като магнитното поле в разглеждания момент е достигнало само до равнината $PNN'P'$, потокът на индукцията му през правоъгълника е:

$$\Phi_B = BS_{OMNP} = Blx\,,$$

където $l = |SR| = |OM|$. Промяната за единица време на този поток е:

(5) $$\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = Bl\frac{\Delta x}{\Delta t} = Blv\,.$$

Тъй като електрично поле е породено само в точките до равнина $PNN'P'$, и тъй като то е перпендикулярно на OP и на MN, единствен ненулев принос към циркулацията на интензитета му $\vec{E}$ по затворения контур $OSRMO$ дава участъкът MO. И понеже той се обхожда в противоположна на $\vec{E}$ посока, тази циркулация е:

(6) $$\Gamma_E = -El\,.$$

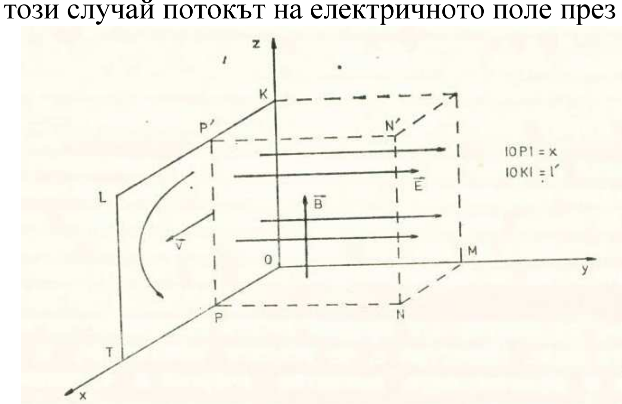
Като заместим десните страни на (5) и (6) в (1а), получаваме:

(7) $$E = vB.$$

Това равенство изразява една връзка между двете характеристики $\vec{E}$ и $\vec{B}$ на електромагнитното поле, която сама по себе си е важна и се споменава без доказателство в общозадължителната подготовка по физика в 10. клас (11, 64). При това заслужава да се отбележи фактът, че за получаване на това **първо следствие** бе използван само законът на Фарадей! Следователно, за да се изведе това свойство на електромагнитното поле не е необходимо да се познава пълната система от уравнения на Максуел.

Скорост на разпространение на промените на електромагнитното поле

За да се получи формулата на Максуел за скоростта, с която се разпространяват промените на електромагнитното поле, е необходимо да се продължат започнатите по-горе разсъждения, като в тях се привлече и уравнение (2а). Дотук установихме, че придвижването на магнитното поле $\vec{B}$ в посока *Ox* се съпровожда неизменно с придвижващо се в същата посока електрично поле $\vec{E}$, породено от промените на магнитното поле. Да разгледаме сега процесът от другата му страна: хомогенно електрично поле $\vec{E}$, успоредно на оста *Oy*, се придвижва със скорост $\vec{v}$ по посока на оста *Ox* (фиг. 2). В този случай потокът на електричното поле през повърхността на



Фиг. 2.

правоъгълника *OKLT* се променя и, в съответствие с хипотезата на Максуел за тока на отместване, в пространството ще се породи магнитно поле с указаната на фиг. 2 посока – $\vec{B}$ е еднопосочно с оста *Oz*. За това поле е валиден законът на Максуел (2а). По аналогия с предишния случай, когато границата на полето е достигнала равнината *PNN'P'*, потокът на електричното поле през повърхността на правоъгълника *OKLT* е:

$$\Phi_E = ES_{OKLT} = El'x\,,$$

където $l' = |OK|$. Промяната за единица време на този поток е:

(8) $$\frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t} = El'\frac{\Delta x}{\Delta t} = El'v\,.$$

(Тук е едно от слабите места на извода – от никъде не следва, че границата на електричното поле ще се премества в пространството със същата скорост *v*, с която по-горе се преместваше границата на магнитното поле.)

Както преди, така и сега, принос към циркулацията на $\vec{B}$ по контура *OKLT* дава само участъкът *OK*, така че:

(9) $$\Gamma_B = Bl'\,.$$

Замествайки десните страни на (9) и (8) в (2а), получаваме нова връзка между *E* и *B*:

(10) $$B = \varepsilon_0\mu_0 vE\,.$$

Ако сега умножим левите и десните страни на (7) и (10) и съкратим произведението *EB*, получаваме $1 = \varepsilon_0\mu_0 v^2$. Това означава, че двете връзки (7) и (10) са съвместими, само ако:

(11) $$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

Получихме прочутата формула на Максуел, която свързва скоростта на разпространение на промените на електромагнитното поле с електричната константа ε_0 и с магнитната константа μ_0. Тя представлява и едно от принципно най-важните следствия от уравненията на Максуел. При това тук трябва да направим следното съществено терминологично уточнение. Не случайно използваме дългия и до известна степен тромав израз *скорост на разпространение на* ***промените*** *на електромагнитното поле*. Обикновено за краткост се говори за *скорост на електромагнитното поле*, но винаги трябва да се има предвид, че по-дългият термин е по-точен: полето като такова не се разпространява, няма как да се разпространява нещо, което по принцип заема цялото пространство (ако и в някои части на пространството характеристиките му да са нула), разпространяват се неговите промени. В този смисъл трябва да се разбират и думите, които употребихме по-горе, казвайки че "магнитно поле се разпространява по оста *Ox* " – разпространява се промяната на полето, границата му се придвижва).

Следвайки хода на разсъжденията на Максуел, от формула (11) може да се направят важни изводи. Наистина, в Международната система на единиците стойността на магнитната константа е избрана фактически произволно – $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H/m. Стойността на електричната константа ε_0 по принцип може да се определи от електростатични измервания. Така например от измерване на заряда и на напрежението на един плосък кондензатор, по формулата $C = \frac{q}{U}$ може да се определи неговият капацитет, а чрез него, при известни площ *S* и разстояние *d* между електроните, от формулата $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ да се определи и стойността на ε_0. така се получава, че ε_0 = 8,85.10^{-12} F/m. С тези стойности за ε_0 и μ_0 от (11) получаваме $v = 3.10^8$ m/s. Пръв Максуел обръща внимание върху факта, че стойността на величината $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$ съвпада с отдавна известната скорост на разпространение на светлината. Това му дава право да изкаже твърдението, че светлината представлява електромагнитна вълна. По такъв начин светлинните явления намират своите обяснения в електродинамиката и ние се оказваме пред едно от най-ярките доказателства за обяснителната мощ на Максуеловата електродинамика.

От направените разсъждения могат да се извлекат и две други следствия. Първо ще обърнем отбележим, че фактически ние правим разглеждане на процесите, които протичат в една **плоска** електромагнитна вълна. И от приложените фигури е вижда, че в този случай двете характеристики на електромагнитното поле – **векторите** $\vec{E}$ **и** $\vec{B}$ **са перпендикулярни както помежду си, така и спрямо посоката на разпространение на вълната**.

Второто следствие от получените връзки засяга енергиите на електричното и на магнитното поле. Известно е, че техните плътности, т.е. количеството електрична и количеството магнитна енергия в единица обем се описват съответно с изразите:

(12) $$w_e = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 \quad \text{и} \quad w_m = \frac{1}{2\mu_0}B^2.$$

Ако в израза за w_m заместим $B = \frac{1}{v}E$ (което следва от (7)), и отчетем, че съгласно с (11) $\frac{1}{\mu_0 v^2} = \varepsilon_0$, получаваме, че $w_e = w_m$. Това равенство показва, че електричното поле, индуцирано от промени на магнитното поле, в разглеждания случай във всяка точка и във всеки момент има точно такава плътност на енергия, каквато има и индуциращото поле. По-нататък плътността на тази енергия на променливото електрично поле е равна на плътността на енергията на породеното от неговите промени магнитно поле и т.н. – ако няма загуби, т.е. ако електромагнитното поле не се превръща в друг вид, описаният процес няма да затихва в хода на разпространение на промените по посока на оста *Ox*.

В приведените разсъждение, както бе отбелязано, съществува една логическа празнина: не е ясно изобщо дали може да се получи електромагнитно поле, промените на което се разпространяват в посока, перпендикулярна на векторите $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Отговорът на този въпрос е във втората част на статията.

Накрая ще отбележим, че отново използваме един широко прилаган при елементарните изложения на електродинамиката подход: ние разгледахме един много частен случай – процесите, предизвикани от придвижване в пространството на границата на едно хомогенно магнитно поле, но резултатите, които получихме – формулите $E = vB$ и $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ не зависят от конкретните особености на избраната ситуация. Тъкмо това обстоятелство дава възможност да обявим тези резултати валидни и за много по-общи случаи.

Литеартура

1. Станев Ст. и др. *Проблеми на съдържанието на диференцираното обучение по физика в средното училище*, Физика, 3, 1990.
2. Дик Ю. И. и др. *Каким быт школьному физическому образованию?* Физика в школе, 3, 1990.
3. Попов Хр. *Изучаване основите на електродинамиката,* С. МНП, 1989.
4. Попов Хр. *Относно преговорно-обобщителната тема "Основни закони на електромагнитното поле"*, Физика, 3, 1983.
5. Попов Хр. *Една възможност за извеждане на формулата за индукция на магнитното поле на постоянен ток по безкраен прав проводник,* Физика, 1, 1982.
6. Попов Хр. *Ток на отместване,* Физика, 4, 1985.
7. Суорц Кл. Э. *Необыкновенная физика обыкновенных явлений,* т. 2, М., Наука, 1987.
8. Попов Хр. и др. *Физика за 9. клас на ЕСПУ*, С., Народна просвета, 1989.
9. Фейнман Р. *Фейнмановские лекции по физике*, т. 6, М., Мир, 1966.
10. *Физика*, пер. с англ. под ред. Ахманова А., М., Наука, 1965.
11. Попов Хр. и др. *Физика за 10. клас на ЕСПУ*, С., Народна просвета, 1986.
12. Борисов М. и др. *Физика за 11. клас,* С., Народна просвета, 1975.