Извод[1] на формулата $w_m = \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$

Въпросът за енергията на електричното поле в средното училище се поставя само при изучаване на електромагнитните явления на второ равнище. Обикновено чрез анализиране процеса на разреждане на кондензатор се стига до извода, че електричното поле притежава енергия, разпределена в пространството с плътност $w_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2$ (1). Естествено е да се постави и въпросът: съществува ли достъпен за учениците начин за доказване, че и магнитното поле притежава енергия, и че нейната плътност се изразява с аналогична формула $w_m = \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$ **?**

Отговорът на този въпрос е положителен, макар че изводът на формулата за плътността на енергията е значително по-сложен, отколкото в случая на електрично поле. В литературата са описани различни варианти на този извод. Тук се предлага един, първа особеност на който е използването на линейната връзка между магнитния поток, заграден от един контур, и тока, който създава полето. С това необходимото интегриране се свежда до използване на познат графичен метод. Втора особеност на предлагания вариант е най-пълното използване на аналогията между електростатиката и теорията на стационарното магнитно поле.

Преди представяне на извода следва да се обърне внимание на два пункта. Първо, доколкото строго погледнато, в рамките на електростатичните и на стационарните магнитни явления не може да се докаже, че взаимодействията се осъществяват чрез посредничеството на поле (т.е. – доколкото подходът на близкото действие и подходът на далечното действие са еднакво допустими), дотолкова не може да се говори и за *доказателство*, че полетата притежават енергия. По същество в училище ние изказваме твърденията, че полетата съществуват обективно и притежават енергия, но в електростатиката и при стационарното магнитно поле не доказваме тези твърдения.

Вторият пункт се отнася до едно принципно различие между двата случая. То се състои в следното: докато изводът на формулата $w_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2$ може да се извърши в рамките на електростатиката, законите на стационарното магнитно поле **не са достатъчни** за извод на формулата $w_m = \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$. Както ще се убедим по-долу, налага се използване на закона на Фарадей за електромагнитната индукция или някои негови следствия, които са закономерности, проявяващи се при променливите полета.

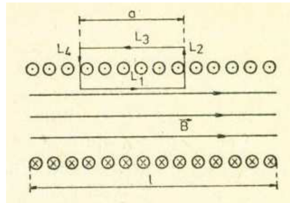
За получаване на желаната формула ще използваме познатия теоретичен прийом, при който се разглежда подходящ прост частен случай, а резултатът се формулира във вид, който не отразява особеностите на случая и поради това се обявява за общовалиден. Въпросният частен случай сега е магнитното поле в дълга права намотка, по която тече постоянен ток с големина I. Видът на индукционните линии на това поле е известен от общозадължителната подготовка – вътре в намотката полето е хомогенно и индукционните му линии са успоредни на оста на намотката, еднакво гъсто разположени прави, а близо до намотката, но от външната й страна полето е пренебрежимо слабо.

Една предварителна задача, която трябва да се реши в случая, е намирането на формула за индуктивността на намотката – индуктивността L, която представлява

---

[1] *Извод на формулата за плътност на енергията на магнитното поле,* Физика, 1990, **1**, с. 42–45.

коефициент на пропорционалност във връзката $\Phi = LI$ между магнитния поток през намотката и тока I през нея.



Фиг. 1.

На фиг. 1 е показан надлъжен разрез по оста на намотката, заедно с част от индукционните линии вътре в нея. За да получим желаната връзка прилагаме интегралната форма на закона на Ампер (или още теоремата на Био–Савар) за изобразения на фигурата правоъгълен контур, състоящ се от отсечките L_1, L_2, L_3 и L_4. Циркулацията Γ_B на индукцията по три от тях – по L_2, L_3 и L_4 е нула, защото там или $\vec{B} = 0$ (по L_3 и по външните части на L_2 и L_4), или $\vec{B}$ е перпендикулярно на контура (по вътрешните части на L_2 и L_4). Тогава циркулацията по целия затворен контур е равна на само на циркулацията по L_1. Ако означим дължината на L_1 с a, поради това, че $\vec{B}$ и L_1 са еднопосочни, циркулацията на $\vec{B}$ по L_1 (което е и циркулация по целия затворен контур) е просто aB, т.е. $\Gamma_B = aB$.

Нека означим с n броя на навивките на единица дължина от намотката. Тогава общият ток, който пробожда заградената от затворения контур повърхност е naI. Съгласно със закона на Ампер този ток, умножен с μ_0, е равен на Γ_B, т.е. $aB = \mu_0 naI$. По такъв начин изразяваме индукцията в намотката чрез тока по нея:

(1) $$B = \mu_0 nI.$$

За да намерим индуктивността на намотката, трябва да пресметнем обхванатия от нея индукционен поток. Ако S е площта на напречното сечение на намотката, потокът на полето през една навивка ще бъде $\Phi_0 = BS = \mu_0 nIS$. Като означим с l общата дължина на намотката, обхванатият от нея поток ще бъде:

$$\Phi = (nl)\Phi_0 = \mu_0 n^2 ISl,$$

Тъй като (nl) е общият брой навивки на намотката. От друга страна обаче $V = Sl$ е точно обемът на намотката, така че оттук и от дефиниционното равенство $\Phi = LI$ за индуктивността намираме:

(2) $$L = \mu_0 n^2 V.$$

След получаване на този предварителен резултат може да се пристъп към пресмятане енергията на полето в намотката.

За целта ще разгледаме процесите в една идеална намотка (т.е. такава, чието омово съпротивление е пренебрежимо малко, т.е. $R = 0$). Нека в момента $t = 0$ краищата на намотката свържем с източник на постоянно ЕДН. През намотката започва да тече ток I, който постепенно нараства с времето (докато достигне стойността, определена от вътрешното съпротивление на източника на ЕДН). Когато през намотка протича променлив ток, по закона на Фарадей в нея се самоиндуцира напрежение $U^* = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$.

На всеки свободен електрон в намотката действат две сили – самоиндуцираната ЕДС, и електричната сила, дължаща се на източника на ЕДН. Във всеки момент тези две сили трябва да се уравновесяват, тъй като в противен случай (съпротивлението на намотката е нула!) би протекъл безкрайно голям ток. Но това означава, че напреженията, които определят тези сили (или обратно – напреженията, които **се** определят от тези сили – зависи кое ще приемем за причина и кое – за следствие): дължащото се на източника на ЕДН напрежение U между краищата на намотката и самоиндуцираното напрежение

U^*, трябва да са равни по големина и с противоположни знаци. От тези разсъждения следва, че:

(3) $$U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Ако моментната стойност на тока в малкия интервал Δt означим с I, за работата на ЕДС на източника за интервала Δt, с помощта на (3) намираме:

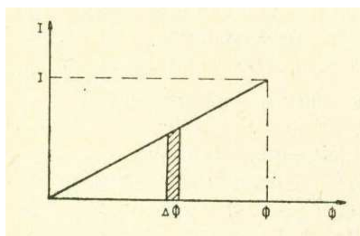
$$\Delta A = IU\Delta t = I\Delta\Phi.$$

Тъй като единственият резултат от действието на тези сили е възникването на магнитно поле (джаулева топлина не се отделя, тъй като $R = 0$), от закона за запазване на енергията следва, че цялата работа ΔA на ЕДС отива за увеличаване на енергията на полето, т.е.:

$$\Delta W_B = I\Delta\Phi,$$

където W_B е енергията на полето в намотката.

По-нататък следва най-съществeният пункт в извода. Нека в съответствие с формула $\Phi = LI$ начертаем графиката на зависимостта на магнитния поток от тока. От фиг. 2 се вижда, че тази графика представлява права линия, минаваща през началото на координатната система.



Фиг. 2.

От същата фигура се вижда още, че ΔA е равно точно на площта на защрихованата ивица с основа $\Delta\Phi$ и височина I. Следователно общата енергия на полето, натрупана в намотката при нарастване на тока от 0 до I, ще бъде равна на площта на триъгълника с основа Φ и височина I. (Именно в това се състои графичното интегриране.) По такъв начин получаваме:

(4) $$W_B = \frac{1}{2} I\Phi,$$

и тъй като $\Phi = LI$, достигаме до важната формула:

(5) $$W_B = \frac{1}{2} LI^2.$$

Получената формула представлява една *глобална връзка*, т.е. – тя свързва общата енергия на намотката с тока през нея. По-нататък следва да търсим *локална връзка*, т.е. равенство между величини, дефинирани в една точка – тогава ще можем да се освободим от ограничителните рамки на частния случай. За целта с помощта на формулите (2) и (1) енергията може да се изрази чрез индукцията на полето:

$$W_B = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 V I^2 = \frac{1}{2\mu_0}(\mu_0 n I)^2 V = \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 V.$$

Оттук следва, че в единица обем от намотката се съдържа енергия:

(6) $$w_B = \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2.$$

Тъкмо това е локалната връзка, която не съдържа особеностите на частния случай, чрез който бе получена – тя не зависи нито от n, нито от V, нито от S или l, които са характеристики на намотката. Именно това е основание (макар и не с качеството на доказателство) да екстраполираме приложимостта на резултата за всички магнитни полета, включително и тези, които зависят от времето.

Сравнението на изложения метод с пътя, по който в (1) се получава формулата $w_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2$, показва аналогията между двата случая. Тази аналогия става още по-пълна, ако чрез връзката $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ плътността на енергията на магнитното поле се изрази не чрез индукцията, а чрез интензитета на полето:

$$w_m = \frac{\mu_0}{2}\vec{H}^2.$$

Там, в електростатиката, за да получим формула за енергията на електричното поле, бе необходимо да познаваме формулата за капацитет на плосък кондензатор $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$, тук – за индуктивността на намотка $L = \mu_0 n^2 V$. Там използваме връзката заряд–напрежение ($q = CU$), тук – връзката магнитен поток–ток ($\Phi = LI$). И в двата случая се използва графичен метод за избягване на интегрирането и т.н. С това още веднъж се демонстрира почти пълната аналогия в пътищата по които се изграждат теориите на електростатичната и на стационарното магнитно взаимодействие.

Литература

1. Попов Хр. и др. *Учебно пособие по физика за СИП в 10. клас на ЕСПУ*, С., Народна просвета, С., 1986.

2. Попов Хр. и др. *Физика за 10. клас,* С., Народна просвета, 1984.