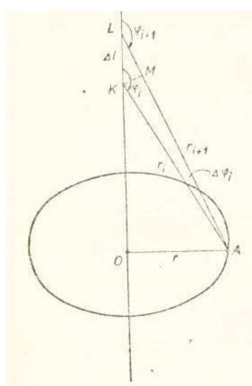
Магнитно поле на постоянен ток по безкраен прав проводник[1]

Известно е, че поради недостиг на време или трудности от математичен характер при изграждане на системния курс по физика се нарушава естествената връзка, която съществува между редица твърдения или формули. От това губят преди всичко логичността и пълнотата на изложението. Особено чести са подобни случаи в електродинамиката. Типичен пример в това отношение е законът на Био–Савар и формулата за магнитната индукция B на полето на постоянен ток, течащ по безкраен прав проводник. Законът на Био–Савар се изучава, защото е основен закон на електродинамиката, който дава връзка между характеристиката на полето ($\vec{B}$) и характеристиката на неговия източник – тока I. Без формулата за индукцията на полето на ток по прав проводник не може да се разбере взаимодействието на токове по успоредни проводници, а оттам – и определението на една от основните единици в SI – на ампера. Поради известни причини обаче тази формула не се извежда от закона на Био – Савар, въпреки че, както се оказва, това е възможно да се направи с елементарни средства – достатъчни са известни познания по тригонометрия.

Работата с по-напреднали ученици дава възможност за запълване на подобни празнини. За целта може да се използват часовете за свободноизбираема подготовка в 11. или в 12. клас. Един начин за извеждане на въпросната формула може да се намери в (1), където разглежданията се опират на определена геометрична конструкция. Тук предлагаме друг вариант на извода, в който често се използва при извод на формулата за потенциал на гравитационното поле на материална точка (вж. напр. (2)) и на формулата за кулоновия потенциал. Идеята е: когато трябва да се намери сума на n събираеми, всяко от тях да се представи като разлика от два члена по такъв начин, че съседните членове в общата сума да се унищожат, като останат само началният и крайният. За конкретна реализация на тази идея следва да се направят следните разглеждания.

Нека по безкрайния прав проводник от фиг. 1, тече постоянен ток и търсим индукцията B на създаденото от него магнитно поле в т. A, която се намира на разстояние r от проводника.



Фиг. 1.

Мислено разделяме проводника на голям брой елементи с дължина Δl, която удовлетворява неравенството $\Delta l << r$. От материала за задължителна подготовка е известно, че посоките на индукциите $\Delta\vec{B}_i$, създадени от различните елементи, са еднакви и допирателни към окръжността през т. A с радиус r и център в т. O върху

[1] *Една възможност за извеждане формулата за индукция на магнитното поле на постоянен ток по безкраен прав проводник*, Физика, 1982, **1**, с. 12–15.

проводника. Следователно и тяхната векторна сума, общата индукция $\vec{B}$ ще има същата посока, а големината й B ще бъде сума от големините ΔB_i на векторите $\Delta\vec{B}_i$.

За да намерим B, първо, ще отбележим, че двете части, на които т. O разделя проводника, са напълно симетрични и равноправни, така че индукцията, създадена в т. A от тока по долната половина на проводника, е равна на индукцията, създадена от тока по горната половина. Следователно търсената индукция B ще бъде равна на удвоената индукция на полето, създадено само от горната половина на проводника.

Нека номерираме с 1, 2, 3, ... елементите от горната половина на проводника. Съгласно със закона на Био–Савар, големината на индукцията в т. A, създадена от тока по i-тия елемент, е:

$$\Delta B_i = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta l}{r_i^2}\sin\varphi_i\,, \tag{1}$$

Където r_i е разстоянието от елемента до т. A, а φ_i – ъгълът между посоката на тока и посоката от елемента до т. A.

За намиране на сумата от всички ΔB_i е необходимо да се избере подходящ параметър, по който да се извърши сумирането. В цитирания по-горе източник (1) то е сведено до сумиране на проекции на дъги от полуокръжност с единичен радиус. Предлаганият тук вариант включва сумиране по φ_i, така че по-нататъшната преработка на формула (1) има за цел да изрази влизащите в нея величини чрез ъглите φ_i и фиксираното разстояние r.

Първо, от ΔAKM се вижда, че $|KM| = r_i\Delta\varphi_i$, така че от правоъгълния триъгълник KML следва:

$$\Delta l = \frac{r_i\Delta\varphi_i}{\sin\varphi_{i+1}} \approx \frac{r_i\Delta\varphi_i}{\sin\varphi_i}\,.$$

Като заместим този израз за Δl в (1) и отчетем, че $r_i\sin\varphi_i = r$, намираме:

$$\Delta B_i = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\Delta\varphi_i\sin\varphi_i\,. \tag{2}$$

Тъй като поради малката стойност на $\Delta\varphi_i$ са валидни приблизителните равенства $\sin\Delta\varphi_i \approx \Delta\varphi_i$ и $\cos\Delta\varphi_i \approx 1$, с помощта на познатите формули от тригонометрията намираме:

$$\begin{aligned}&\cos\varphi_i - \cos\varphi_{i+1} = \cos\varphi_i - \cos(\varphi_i + \Delta\varphi_i) = \cos\varphi_i - \cos\varphi_i\cos\Delta\varphi_i + \sin\varphi_i\sin\Delta\varphi_i \approx \\ &\cos\varphi_i - \cos\varphi_i + \Delta\varphi_i\sin\varphi_i = \Delta\varphi_i\sin\varphi_i\end{aligned}\,. \tag{3}$$

Чрез тази връзка дясната страна на (2) може да се представи точно в желаната форма на разлика от два члена:

$$\Delta B_i = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos\varphi_i - \cos\varphi_{i+1}\right).$$

Тъй като $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi_1 = 0$ и за сумата от индукциите на полетата на първите n елемента имаме:

$$B^n = \Delta B_1 + \Delta B_2 + \ldots + \Delta B_n = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\varphi_2 + \cos\varphi_2 - \ldots + \cos\varphi_n - \cos\varphi_{n+1}\right) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\cos\varphi_{n+1}$$

Тъй като $\lim_{n\to\infty}\varphi_n = \pi$ (вж. фиг. 1) според казаното в началото, търсената индукция е:

$$B = 2\lim_{n\to\infty} B_n = -\frac{2\mu_0 I}{4\pi}\cos\pi\ ,$$

т.е.:

(4) $$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}.$$

Значението на получената формула далеч не се изчерпва с възможността да се разпише израз за силата на взаимодействие между токове, които текат по два безкрайни успоредни проводника, а оттам – и за дефиницията на ампера. Много по-важно от принципна гледна точка е, че тя дава възможност почти непосредствено да се стигне до интегралната (глобалната) форма на закона на Био–Савар. За целта е достатъчно да се въведе величината *магнитодвижещо напрежение* Γ_B (или *циркулация на магнитната индукция по дадена крива*) – както например това се прави в (3) – и да се забележи, че за всички точки от окръжността през т. A индукцията B има една и съща големина, а посоката й е перпендикулярна към тази окръжност. При тези условия Γ_B е равно просто на произведението на B с дължината $2\pi r$ на окръжността. Така от (4) получаваме:

(5) $$\Gamma_B = \mu_0 I.$$

След това прилагаме познатия от други случаи метод (вж.напр. разглежданията за теоремата на Гаус–Остроградски в (3)), при който едно твърдение се доказва в определен конкретен и прост случай, но резултатът се формулира така, че не отразява особеностите на частния случай и се обявява за общовалиден. В този случай обикновено на учениците се казва, че въпросното обобщение се прави с по-сложни математични средства. По този начин съдържащото се във формула (5) твърдение вече става израз на едно много общо твърдение, твърдението, че

циркулацията Γ_B на магнитната индукция на поле на произволни постоянни токове по произволна затворена крива е равна на умножения с μ_0 общ ток I, обхванат от кривата.

А това всъщност е съдържанието на глобалната (интегралната) форма на закона на Био–Савар.

Предложеният извод на формула (4) е подобен на този в (1). Както се вижда от изложението, съществена за извода е формула (3), за получаване на която използвахме, че:

(6) $$\sin x \approx x \qquad \text{и} \qquad \cos x \approx 1,\ \text{когато}\ x \ll 1.$$

В зависимост от подготовката по математика може да се срещнат две различни ситуации. Първо, учениците, които имат по-добра подготовка и могат а работят с производни, изводът на (3) може да се представи по-убедително, като се използва, че в лявата страна на (3) стои взетото със знак минус нарастване на функцията $\cos\varphi_i$ при едно малко нарастване на аргумента й с величината $\Delta\varphi_i$:

(7) $$\cos\varphi_i - \cos\varphi_{i+1} = \cos\varphi_i - \cos(\varphi_i + \Delta\varphi_1) = -\left[\frac{d}{d\varphi_i}\cos\varphi_i\right]\Delta\varphi_i = \Delta\varphi_i \sin\Delta\varphi_i\,.$$

Второ, възможно е учениците да не са запознати с диференцирането като операция, и освен това да не познават втората от формулите (6). (Първата от тези формули се среща и в други случаи, а освен това следва лесно от дефиницията за ъгъл и от определението за $\sin x$.) В този случай съществуват две възможности. По-простата се свежда до извода на формулата:

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} \approx \sqrt{1-x^2} \approx 1\,,$$

при което се използва, че щом едно число е много по-малко от 1, квадратът му е още по-малък и може да се пренебрегне спрямо единицата.

Освен това обаче формула (3) може да се изведе и чрез геометрични съображения. При това следва да се внимава за знаците на величините.) Така, за да намерим връзка между cosφ_i и cosφ_{i+1}, използваме, че от триъгълниците *OAK* и *OAL* имаме:

$$\cos\varphi_i = -\frac{|OK|}{r_i} \qquad \text{и} \qquad \cos\varphi_{i+1} = -\frac{|OL|}{r_{i+1}} = -\frac{|OK| + \Delta l}{r_i + |ML|}.$$

Тъй като от триъгълник *KLM* може да изразим $|ML|$:

$$|ML| = -|KM|\cot g\varphi_{i+1} \approx -r_i\Delta\varphi_i \cot g\varphi_i\,,$$

Като използваме и намерения преди израз за Δl, получаваме:

$$\cos\varphi_{i+1} = -\frac{|OK| + \frac{r_i\Delta\varphi_i}{\sin\varphi_i}}{r_i - r_i\Delta\varphi_i\cot g\varphi_i} = \frac{\cos\varphi_i - \frac{\Delta\varphi_i}{\sin\varphi_i}}{1 - \Delta\varphi_i\cot g\varphi_i} = \frac{\left(\cos\varphi_i - \frac{\Delta\varphi_i}{\sin\varphi_i}\right)(1 + \Delta\varphi_i\cot g\varphi_i)}{1 - (\Delta\varphi_i)^2\cot g^2\varphi_i}.$$

Понеже по условие $\Delta l \ll 1$, членовете, пропорционални на $(\Delta\varphi_i)^2$ може да се пренебрегнат, при което се получава точно търсената връзка:

$$\cos\varphi_{i+1} = \cos\varphi_i - \Delta\varphi_i\left(\frac{1}{\sin\varphi_i} - \frac{\cos^2\varphi_i}{\sin\varphi_i}\right) = \cos\varphi_i - \Delta\varphi_i\sin\varphi_i\,.$$

Литература:

1. Кабардин О. Ф. и др. *ФакультативньІй курс физики*, 9 класс, М., Просвещение, 1974.
2. Борисов М. и др. *Физика*, 9. клас, С., Народна просвета, 1969.
3. Златев Ив. и др. *Физика,Учебник за десети клас на общообразователните трудово-политехнически училища*, С., Народна просвета, 1977.