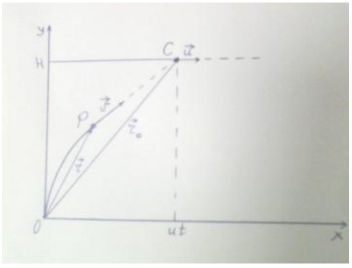
Ракета срещу самолет

Задача. Самолет лети на височина H с постоянна по посока и големина скорост. В момента, когато прелита над зенитен ракетен комплекс, от него стартира ракета, чиято скорост е два пъти по-голяма от скоростта на самолета и във всеки момент насочена към него. Намерете траекторията на ракетата. (Търсената крива понякога се нарича “**линия на преследването**”).

Анализ. Очевидно ракетата трябва да се движи във вертикалната равнина, определена от траекторията на самолета и положението на ракетния комплекс. Движенията разглеждаме спрямо координатна система с начало в комплекса, с вертикална ос Oy и ос Ox – успоредна на скоростта $\vec{u}$ на самолета (фиг.1).



Фиг. 1.

Времето отчитаме от момента на старта на ракетата. В този случай компонентите на радиус – векторите $\vec{r}_0$ на самолета C и $\vec{r}$ на ракетата P в момента t са:

(1) $$\vec{r}_0(t)=(ut,H) \quad \text{и} \quad \vec{r}(t)=(x(t),y(t)),$$

където с u = const е големината на скоростта на самолета.

Според условието, единичният вектор $\vec{v}_0$, насочен от ракетата към самолета, е еднопосочен с разликата $\vec{r}_0-\vec{r}$, т .е. $\vec{v}_0=\dfrac{\vec{r}_0-\vec{r}}{|\vec{r}_0-\vec{r}|}$. Ако означим с $v = 2u$ големината на скоростта на ракетата, за самата скорост можем да напишем:

(2) $$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=v\vec{v}_0=2u\frac{\vec{r}_0-\vec{r}}{|\vec{r}_0-\vec{r}|}.$$

Като отчетем, че съгласно с (1) $|\vec{r}_0-\vec{r}|=\sqrt{(ut-x)^2+(H-y)^2}$ и проектираме равенство (2) върху осите на координатната система, получаваме:

(3) $$\frac{dx}{dt}=2u\frac{ut-x}{\sqrt{(ut-x)^2+(H-y)^2}},$$

(4) $$\frac{dy}{dt}=2u\frac{H-y}{\sqrt{(ut-x)^2+(H-y)^2}}.$$

Решението на тази система от две обикновени диференциални уравнения би дало закона за движение на ракетата. В условието обаче се търси нещо много по-малко – само траекторията на ракетата, т. е. y като функция на x, или x като функция на y. В случая по-удобно се оказва именно второто, т. е. ще смятаме, че $x = x(y)$. За целта от (3) и (4) трябва да се елиминира времето. Това се постига на две стъпки. Първо разделяме тези равенства и намираме:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{ut - x}{H - y}.$$

След като решим това равенство спрямо ut, диференцираме по времето с отчитане, че $u = \text{const}$ и, че x зависи от t посредством y, получаваме:

$$u = (H - y)\frac{d^2x}{dy^2}.\frac{dy}{dx}.$$

Фактът, че скоростта на ракетата е два пъти по-голяма от скоростта на самолета, изразяваме с равенствата:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 2u = 2(H - y)\frac{d^2x}{dy^2}.\frac{dy}{dt},$$

при което сме използвали току що полученото съотношение. Като извадим из-под корена $\frac{dy}{dt}$ ($\frac{dy}{dt} > 0$!), съкратим тази компонента на скоростта в двете страни на равенството и отчетем, че $\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dy}$, получаваме:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = 2(H - y)\frac{d^2x}{dy^2} = 2(H - y)\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right). \tag{5}$$

Ако за момент гледаме на y и на $\frac{dx}{dy} = w$ като на две променливи, за тях (5) представлява обикновено диференциално уравнение от първи ред с разделящи се променливи и може да бъде записано във вида:

$$\frac{dy}{2(H - y)} = \frac{dw}{\sqrt{1 + w^2}}.$$

Интегрираме уравнението (и двата интеграла са таблични!) и, след като заменим w с равното му, получаваме:

$$-\frac{1}{2}\ln(H - y) = \ln\left(\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} + \frac{dx}{dy}\right) + C. \tag{6}$$

Интеграционната константа определяме като имаме предвид, че в началния момент $y = 0$ и скоростта на ракетата е насочена вертикално нагоре, т. е. $\dfrac{dx}{dy} = 0$.

При тези условия от (6) следва $C = -\dfrac{1}{2}\ln H$. Заместваме тази стойност на C в (6), антилогаритмуваме, прехвърляме члена $\dfrac{dx}{dy}$ в лявата страна на равенството и намираме:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{y}{H}}} - \frac{dx}{dy} = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,.$$

Като повдигнем двете страни в квадрат и решим полученото уравнение спрямо $\dfrac{dx}{dy}$, отново получаваме уравнение с разделящи се променливи:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{1-\dfrac{y}{H}}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{y}{H}}\,.$$

Резултатът от неговото интегриране е:

$$x = -H\sqrt{1-\frac{y}{H}} + \frac{H}{3}\left(1-\frac{y}{H}\right)^{\frac{3}{2}} + C'\,.$$

Новата интеграционна константа определяме от началното условие $x = 0$ при $y = 0$. С негова помощ определяме, че $C' = \dfrac{2H}{3}$.

Така за търсеното уравнение на траекторията окончателно получаваме:

$$x = \frac{2H}{3} + \frac{H}{3}\left(1-\frac{y}{H}\right)^{\frac{3}{2}} - H\sqrt{1-\frac{y}{H}}\,. \tag{7}$$

Интересно следствие от него е, че траекторията не зависи от големината на скоростта на самолета. От уравнението следва още, че точката, в която ракетата достига самолета (т. е. точката с ордината $y = H$), има абсциса $x_0 = 2H/3$. Тъй като скоростта u на самолета е постоянна, той ще измине разстоянието x_0 за време $T = \dfrac{2H}{3u}$. Това е и времето за полета на ракетата.

Коментар. Интересен е въпросът доколко фигуриращият в условието на задачата фактор 2 е съществен за решението? Ясно е, че ракетата ще настигне самолета и ако скоростта й е и повече от два пъти по-голяма от неговата скорост. Това повдига въпроса дали уравненията могат да се интегрират в елементарни функции, ако скоростта на ракетата е не $2u$, а au, където a е реално положително число. От физични съображения е ясно, че при $a < 1$ ракетата никога няма да настигне самолета, но това поставя и допълнителния въпрос, дали неравенството $a > 1$ е достатъчно, за да гарантира поразяване на целта?

Отговори на тези въпроси намираме, като повторим всички пресмятания, но вместо връзката $v = 2u$ използваме по-общото равенство $v = au$. Оказва се, че траекторията отново може да се опише с елементарни функции и уравнението й има вида:

$$x = \frac{H}{2\left(1+\frac{1}{a}\right)}\left(1-\frac{y}{H}\right)^{1+\frac{1}{a}} - \frac{H}{2\left(1-\frac{1}{a}\right)}\left(1-\frac{y}{H}\right)^{1-\frac{1}{a}} + \frac{H}{a-\frac{1}{a}}. \tag{8}$$

Както трябва и да се очаква, при $a = 2$ дясната страна на това равенство се редуцира на получения преди резултат.

Като имаме уравнението на траекторията, можем да намерим и къде ракетата ще настигне самолета. За целта в (8) трябва да положим $y = H$. Така получаваме, че това става в точка с абсциса $x_0 = \dfrac{H}{a-\frac{1}{a}}$. При това се вижда, че единственото условие, което осигурява крайна стойност на x_0, е неравенството $a > 1$ (само в този случай степенният показател на второто събираемо в дясната страна на уравнението на траекторията е положителен). Следователно, независимо от височината, на която лети самолетът, щом ракетата се движи по-бързо от него, тя непременно ще го настигне.

Теми за размисъл.

1. Разгледайте случая $a = 1$ –резултатът отново се изразява с елементарни функции. От физични съображения може да се предположи, че при достатъчно големи стойности на времето (т. е. при $t \to \infty$), разстоянието между ракетата и самолета в този случай ще клони към някаква крайна, различна от нула стойност, която зависи от H.

2. По-нататъшно обобщение на задачата може да включва изстрелване на ракетата преди самолетът да мине над стартовата й площадка. Това би приближило задачата до реалността, тъй като старт на ракета едва когато самолетът прелита над ракетния комплекс може да се окаже твърде закъснял – възможно е до този момент самолетът вече да е приключил мисията си.