Движения при наличие на Стоксово съпротивление

При един често срещан вид движения неподвижно тяло започва да се движи под действие на сила с постоянна посока. Ако върху тялото действа и Стоксова съпротивителна сила (т.е. сила с противоположна на скоростта посоката и големина – право пропорционална на големината на скоростта), след известно време то, достигайки определена стационарна скорост, продължава да се движи равномерно. По време на преходния период до достигане на тази скорост характерът на движението зависи от характера на движещата сила. Докато в учебната литература найчесто се разглежда случаят на постоянна движеща сила, в практиката се срещат и движения, при които източникът на силата (някакъв двигател) развива постоянна мощност. Характерът на движенията в двата случая по време на преходния период е предмет на разглеждане в следната задача.

Задача. Върху неподвижно тяло с маса m в определен момент започва да действа сила с постоянна посока и: **А)** постоянна големина F; **Б)** големина, която се променя с времето така, че е постоянна мощността P на източника, осигуряващ силата. Върху тялото действа и Стоксова съпротивителна сила $\vec{F}_C = -k\vec{v}$, където k е известна константа, а $\vec{v}$ – скоростта на тялото. Намерете законите за движението, скоростта и ускорението на тялото в двата случая.

Решение. Началото на координатната система избираме в точката, от която започва движението на тялото, а оста Ox насочваме в посока на движещата сила. За начален избираме момента, в който започва да действа силата. И в двата случая движението на тялото е по оста Ox и съгласно с втория принцип на динамиката преместването x на тялото се определя от уравнението:

$$m\frac{dv}{dt} = F - kv, \qquad (1)$$

където F и v са проекциите на съответните вектори върху Ox.

А) В първия случай $F = \text{const}$ и уравнението за скоростта придобива вида:

$$m\frac{dv}{dt} + kv = F. \qquad (2)$$

Решението на това линейно диференциално уравнения търсим от вида:

$$v(t) = Ce^{\alpha t} + D, \qquad (3)$$

където C, D и α са константи. За да ги определим, диференцираме (3) по времето и заместваме получения израз за dv/dt в (2). Полученото уравнение:

$$m\alpha Ce^{\alpha t} + kCe^{\alpha t} + kD = F$$

трябва да бъде изпълнено за всяко t, което е възможно само ако:

$$\alpha = -\frac{k}{m} \quad \text{и} \quad D = F/k.$$

Така решението придобива вида:

$$v(t) = Ce^{-\frac{kt}{m}} + \frac{F}{k},$$

като оставащата все още неопределена константа C се определя от началното условие, че тялото е неподвижно в момента $t = 0$, т.е. $v(0) = 0$:

$$0 = C + \frac{F}{k}, \quad \text{или} \quad C = -\frac{F}{k}.$$

По такъв начин законът за скоростта окончателно придобива вид:

(4) $$v(t)=\frac{F}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Чрез диференциране по времето намираме и ускорението:

(5) $$a(t)=\frac{F}{m}e^{-\frac{k}{m}t}.$$

За да намерим закона на движението, интегрираме (4) по времето и налагаме началното условие $x(0) = 0$. По такъв начин получаваме:

(6) $$x(t)=\frac{Ft}{k}-\frac{mF}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

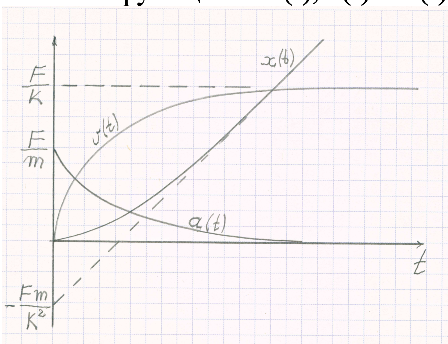
От формула (5) се вижда, че движението започва с ускорение $a_0 = F/m$. След изтичане на достатъчно дълго време, когато експонентата може да се пренебрегне, ускорението и скоростта клонят към стационарните си стойности – съответно нула ($a_c = 0$) и:

(7) $$v_c = F/k,$$

а законът за движението придобива вида:

(8) $$x(t)=v_c t-\frac{mF}{k^2}.$$

От показателя на експонентата ($\frac{k}{m}t$) се вижда, че преходният период за достигане на тези стойности е толкова по-кратък, колкото по-малка е масата на тялото и колкото по-голяма е константата k, определяща съпротивителната сила. Примерният вид на графиките на функциите $x(t)$, $v(t)$ и $a(t)$ е показан на фиг. 1.



Фиг. 1.

Б) Моментната големина F на движещата сила във втория случай се определя от известната връзка между нея, мощността P и скоростта v: $P = Fv$. Като заместим в (1) $F = P/v$, за уравнението на движение получаваме:

$$m\frac{dv}{dt}=\frac{P}{v}-kv,$$

или, след като приведем към еднакъв знаменател, прехвърлим съпротивителната сила в лявата страна и отчетем, че $v\frac{dv}{dt}=\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt}$:

$$\frac{m}{2}\frac{dv^2}{dt}+kv^2=P. \tag{9}$$

Уравнение (9) се различава от (2) само по това, че в него неизвестна величина е не v, а v^2, коефициентът пред производната е $m/2$, а не m, и в дясната страна вместо постоянната сила F фигурира постоянната мощност P. И тъй като началното условие е същото, както в предишния случай ($v(0)=0$), то и решението му се получава от (4) със съответните замени:

$$v^2(t)=\left(1-e^{-\frac{2k}{m}t}\right)\frac{P}{k}.$$

Следователно във втория случай законът за скоростта е:

$$v(t)=\sqrt{\left(1-e^{-\frac{2k}{m}t}\right)\frac{P}{k}}. \tag{10}$$

Чрез диференциране по времето от него получаваме и закона за ускорението:

$$a(t)=\frac{\sqrt{Pk}}{m}\frac{e^{-\frac{2k}{m}t}}{\sqrt{1-e^{-\frac{2k}{m}t}}}. \tag{11}$$

Получаването на закона за движение изисква пресмятане на интеграла:

$$x(t)=\int_0^t v(t)dt=\int_0^t\sqrt{\left(1-e^{-\frac{2kt}{m}}\right)\frac{P}{k}}dt.$$

За целта е удобно да се въведе новата променлива:

$$y=\sqrt{1-e^{-\frac{2kt}{m}}},$$

след което интегралът придобива вида:

$$x(t)=\frac{m}{2k}\sqrt{\frac{P}{k}}\int_0^{\alpha(t)}\frac{y^2}{1-y^2}dy,$$

където с $\alpha(t)$ е означена функцията:

$$\alpha(t)=\sqrt{1-e^{-\frac{2kt}{m}}}. \tag{12}$$

Пресмятането на оставащия интеграл води до следния резултат:

$$x(t)=\frac{m}{k}\sqrt{\frac{P}{k}}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\alpha(t)}{1-\alpha(t)}\right)-\alpha(t)\right]. \tag{13}$$

От формула (11) се вижда, че в този случай движението започва с безкрайно голямо ускорение ($a(0)=\infty$). Намерените закони за скоростта и ускорението показват, че и в този случай двете величини се стремят експоненциално към стационарните си стойности – $a_c = 0$ и съответно:

$$v_c=\sqrt{\frac{P}{k}}. \tag{14}$$

За да намерим вида на закона за движение при достатъчно големи стойности на t, когато експонентата е пренебрежимо малка спрямо единицата, в знаменателя на логаритъма в (13) използваме, че:

$$\alpha(t)=\sqrt{1-e^{-\frac{2kt}{m}}}\approx 1-\frac{1}{2}e^{-\frac{2kt}{m}}.$$

Така законът за движение при големи стойности на t придобива вида:

(15) $$x(t)=\sqrt{\frac{P}{k}}t-(1-\ln 2)\frac{m}{k}\sqrt{\frac{P}{k}}.$$

Интересен извод, който следва от формулите (7) и (14) е, че и в двата разгледани случая скоростта на равномерното движение, стационарната скорост не зависи от масата на тялото.

Коментар. Да сравним движенията на две еднакви тела (еднакви маси, форма и размери), които започват да се движат под действие на еднопосочни сили със съответно постоянна големина и мощност. За да направим сравнението, ще изберем мощността P така, че стационарните скорости на движение на двете тела да бъдат равни. От формулите (7) и (14) се вижда, че това се достига при $\sqrt{\frac{P}{k}}=\frac{F}{k}$, т.е. когато $P=\frac{F^2}{k}$. В този случай законите (4) и (10) за скоростта, (5) и (11) за ускорението, както и двата закона за движение (6) и (13), приемат съответно вида:

$$v'=\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)\frac{F}{k};\qquad v''=\sqrt{1-e^{-\frac{2k}{m}t}}\,\frac{F}{k}$$

$$a'=\frac{F}{m}e^{-\frac{k}{m}t};\qquad a''=\frac{F}{m}\frac{e^{-\frac{2k}{m}t}}{\sqrt{1-e^{-\frac{2k}{m}t}}}$$

$$x'=\frac{F}{k}t-\frac{mF}{k^2}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)\qquad x''(t)=\frac{mF}{k^2}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1-\alpha(t)}{1+\alpha(t)}-\alpha(t)\right].$$

където с прим са отбелязани величините за движение при постоянна сила, а със секонд – при постоянна мощност.

а) От първата двойка равенства се вижда, че скоростите на двете тела са равни при $t=0$ и при $t=\infty$. Лесно се показва, че във всеки друг момент скоростта на второто тяло, което се движи под действие на сила, развиваща постоянна мощност, е по-голяма, т.е. $v''>v'$. В този случай второто тяло постоянно изпреварва първото, като след достатъчно дълго време, когато скоростите им достигнат общата стационарна стойност, разстоянието между тях, т.е. разликата $\Delta x=x''-x'$ от изминатите пътища, естествено, остава постоянна. С помощта на изразите за x'' и x' за Δx намираме:

$$\Delta x=\frac{mF}{k^2}\ln 2.$$

б) Да сравним и ускоренията на двете тела. Както вече бе отбелязано, тялото, на което действа постоянна сила, започва движението си с крайно по големина ускорение F/m. В същия начален момент обаче ускорението на другото тяло е безкрайно голямо, тъй като знаменателят във формулата за а” е нула. Тъй като след достатъчно дълго време ускоренията на двете тела стават нула, възниква въпрос дали съществува момент, в който те са равни. От приравняването на a' и a'' се получава, че ускоренията се изравняват в момента $t_0 = m\ln 2/2k$. По-нататък пресмятането на отношението $(a''/a')^2$ показва, че след момента t_0 ускорението на второто тяло остава по-малко от това на първото.

в) Накрая практически интерес може да представлява разглеждането на движенията и от енергетична гледна точка. Енергията на източника, който осигурява постоянна мощност, за време t намалява с толкова, колкото е извършената от силата работа, т.е.:

$$\Delta W''(t) = Pt = F^2 t/k,$$

като сме отчели валидната в този случай връзка $P = F^2/k$.

Намалението на енергията на източника, който осигурява постоянна по големина сила пресмятаме, като отчетем, че освен постоянна, силата е и еднопосочна с преместването. Като вземем предвид формула (6), получаваме:

$$\Delta W'(t) = Fx(t) = \frac{F^2}{k}t - \frac{mF^2}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Сравнението между последните два израза показва, че до всеки момент след началото на движението източникът на постоянната мощност е изразходвал повече енергия. Този извод може да се разглежда като очакван, защото съгласно направения по-горе извод, тялото, на което действа силата с постоянна мощност, постоянно изпреварва другото тяло.

Малко по-сложна е оценката на икономичността на двете движения, когато се интересуваме от енергията, изразходвана за преодоляване на едно и също разстояние – случай, който от практическа гледна точка може да бъде по-важен. Оказва се, че когато разстоянията са достатъчно големи, за да се достигне стационарната скорост, движението под действие на постоянна сила е по-икономично, като разликата в изразходваните енергии не зависи от разстоянието.