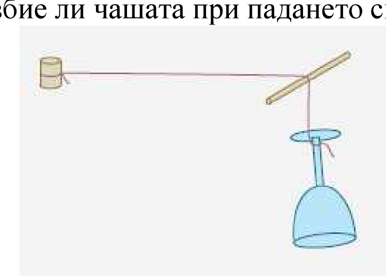
Проста задача със сложно решение

Задача. През хоризонтална пръчка е прехвърлена тънка нишка. На единия край на нишката виси завързана стъклена чаша, на другия е вързана коркова тапа (вж. фиг.). Когато тапата се освободи, под действие на силата на тежестта двете тела започват да падат. Въпросът е, ще се разбие ли чашата при падането си на пода?



Решение. Тази постановка обикновено се препоръчва за демонстриране действието на закона за запазване на момента на импулса. Както ще покаже качественото разглеждане, крайният резултат след освобождаване на тапата може да бъде твърде различен, в зависимост от някои параметри (маси на телата, коефициент на триене между нишката и пръчката, височина на пръчката над пода) и някои начални условия (разстояние между тапата и пръчката, начално разстояние между чашата и пода).

Ако човек не се замисли или не знае достатъчно физика, отговорът е ясен: по-тежката чаша ще издърпа леката тапа, последната ще се прехвърли над пръчката и двете тела ще паднат на пода. Дали чашата ще се разбие вече зависи от здравината й и от височината, от която пада.

Отчитането на законите на динамиката обаче усложнява разглежданията. За да не заплитаме допълнително ситуацията, ще смятаме нишката безмасова. Насочената надолу сила на тежестта на тапата притежава определен въртящ момент спрямо пръчката, така че започвайки движението си, тапата ще се доближава до вертикалната равнина, определена от пръчката и чашата. При това движение рамото на силата на тежестта и въртящият момент намаляват, но въртящият момент запазва посоката си, така че ъгловият момент на тапата (момента на импулса й) расте. Тъй като падането на чашата скъсява разстоянието между тапата и пръчката (радиуса на моментната окръжност, по която се върти тапата), запазването на момента на импулса изисква увеличаване на ъгловата скорост на въртене. И ако тази ъглова скорост стане достатъчно голяма, тапата може да направи пълен оборот около пръчката, и дори не само един. Това веднага ще увеличи многократно триенето на нишката в пръчката и може да спре падането на чашата. Ако се реализира тази ситуация, чашата няма да достигне пода и няма да се разбие.

Това решение предполага наличие на триене между нишката и пръчката. Ако триене няма, ситуацията вместо да се опрости, като че ли се усложнява. Какво става? Намотаването на нишката около пръчката доближава тапата към пръчката по спирала с намаляващ радиус. В един момент, който зависи вече и от радиуса на пръчката, тапата ще я докосне и трябва да спре. Оттук нататък, под влияние на тежестта на чашата, нишката ще започне да се размотава в обратна посока (няма триене!) и в края на краищата чашата ще падне на пода, а тапата – върху нея. За да се разгледа количествено този сценарий, трябва да се отчита нов параметър – радиуса на пръчката.

И при наличие на триене количествените разглеждания не са прости. Чашата пада под действие на разликата от нейната тежест и опъването на нишката. Тапата се движи също под действие на две, но вече с различни посоки сили: насочената надолу тежест и опъването на нишката, което само в началния момент е в хоризонтална посока. Освен това трябва да се отчита и силата на триене между нишката и пръчката.

Достатъчно прости изглеждат само два гранични случая: когато в началния момент тапата е много близо до пръчката, и когато е много далече от нея[1]. В първия тапата не може да "набере" достатъчна ъглова скорост, за да направи и една обиколка около пръчката – двете тела падат на пода. Във втория случай, когато тапата е много далеч от пръчката (може би – ако е доста по-далеч, отколкото е разстоянието от пръчката до пода), опъването на нишката слабо влияе на движението й. Независимостта на движенията в хоризонтална и във вертикална посока гарантира, че двете тела едновременно ще достигнат пода, но в различни точки – чашата под пръчката, а тапата – далеч от нея.

Условието на задачата предполага (щом се говори за стъклена чаша и тапа) значителна разлика между масите на двете тела – тежка чаша и лека тапа. Точното решение обаче зависи от конкретното съотношение между масите. Това също предполага два крайни, гранични случая, в които изходът от ситуацията може да се предположи въз основа на качествени разглеждания. Това са случаят на почти равни маси, и случаят на тапа с пренебрежимо малка маса. (Случаят, в който тапата е по тежка от чашата смятаме нереален.) В единия – когато тапата е съвсем малко по-лека от чашата, чашата започва да пада с ускорение приблизително $g/2$, което с увеличаване скоростта на "тежката" тапа постепенно намалява и, в зависимост от началното разстояние от тапата до пръчката, може да се реализират различни ситуации, включително и това, люлеещата се тапа в един момент да започне да изтегля чашата нагоре (в случай, че тежестта на чашата не осигурява достатъчно центростремително ускорение на тапата). Другият граничен случай, когато масата на тапата е пренебрежимо малка, е по-прост – чашата пада свободно, достига пода и се чупи или не в зависимост от здравината си и от придобитата скорост, т.е. – от височината, от която пада. При това разнообразието от възможности се увеличава още повече, ако отчитаме и триенето и допускаме, че то може да има различна големина.

Ако при някои от тези случаи чашата стигне до пода (това почти със сигурност ще се реализира, ако в началото разстоянието от нея до пода е малко), отново са възможни два случая: тя да не се счупи, или да се счупи, но нишката да остане завързана за някое достатъчно тежко парче. В този случай тапата най-вероятно ще остане да се люлее като махало, чиято постоянна дължина зависи и от това, дали тапата се е прехвърлила един или няколко пъти над пръчката. Ако нишката остане завързана за леко парче от счупената чаша (или краят й се освободи от останките на чашата), тапата на свой ред ще падне на пода.

Разглеждането на общия случай изисква писане и решаване на уравнения. Законите за движение на двете тела ще зависят от съотношението между масите им, от началните им разстояния до пръчката и от триенето на нишката в пръчката. Дали, ако падне на пода, чашата ще се разбие, зависи както от здравината й, така и от разстоянието между пръчката и пода.

Заради тези многообразни теоретични възможности, ако решите все пак да демонстрирате някому как леката тапа "спасява" от счупване падащата чаша, най-добре предварително изпробвайте постановката. Във вашия конкретен случай, когато нямате повече от една пръчка и различни нишки, единствените параметри, които можете да подбирате, са общата дължина на нишката, началното разстояние между тапата и пръчката и височината на пръчката над пода. Когато експериментирате, не забравяйте да постелете на пода нещо меко (например дебел пласт дунапрен) – иначе рискувате да влезнете в големи разходи за изпочупени чаши.

---

[1] Тук човек не може да не си спомни анекдота за теоретика, който трябвало да реши задачата за стабилност на маса с n крака. Той бързо се справил със задачата при $n = 1$ и $n = \infty$, след което цял живот посветил усилията си на случая n – произволно крайно число.