Ученик и автобус

Задача. Жилището A на един ученик се намира по трасето между две съседни автобусни спирки B и C. За да отиде на училище, ученикът трябва да вземе автобуса, който се движи в посока от B към C. Скоростта на автобуса е v, а на ученика – u. Къде се намира жилището, ако за ученика е без значение дали ще вземе автобуса от спирка B, или от спирка C? (Времето за престой на автобуса по спирките се пренебрегва спрямо времената, необходими на ученика да стигне до тях.)

Анализ. Ако жилището е много близо до спирката B, ученикът трябва да пресрещне и вземе автобуса на тази спирка, защото докато стигне спирка C, по-бързият автобус може да го задмине. Обратно, ако ученикът живее много близо до спирка C, задължително трябва да се отправя към нея, защото в противен случай рискува по пътя към B да се размине с автобуса.

От тези разсъждения и “от съображения за непрекъснатост” следва, че непременно някъде между спирките A и B има място, тръгвайки от което ученикът може да “хване” един и същи автобус и от спирка A, и от спирка B.

Решение. Да означим разстоянията от жилището A до спирките B и C съответно с $|AB| = x$ и $|AC| = y$. Времето, необходимо на ученика да стигне до спирка B, е $\frac{x}{u}$. Да предположим, че в момента, когато той тръгва от А, автобусът се намира на разстояние точно $\left(\frac{x}{u}\right)v$ преди спирка В. В този случай ученикът и автобусът пристигат на спирката едновременно и ученикът отпътува към училището.

Ако обаче при същото разположение (автобусът на разстояние $\left(\frac{x}{u}\right)v$ преди спирка B) ученикът се насочи не към B, а към спирка C, той ще стигне там след време $\frac{y}{u}$. В момента на тръгване на ученика от A автобусът се е намирал на разстояние $\left(\frac{x}{u}\right)v + x + y$ от спирка C. Движейки със скорост v, той ще я стигне за време $\frac{\left[\left(\frac{x}{u}\right)v + x + y\right]}{v}$. За да стигнат автобусът и ученикът едновременно до C, трябва да бъде изпълнено равенството:

$$\frac{\left[\left(\frac{x}{u}\right)v + x + y\right]}{v} = \frac{y}{u}.$$

Оттук лесно получаваме, че ученикът ще успее да “хване” един и същи автобус, независимо към коя спирка ще се насочи, ако отношението на разстоянията x и y до двете спирки е свързано със скоростите на ученика и на автобуса чрез равенството:

$$\frac{x}{y} = \frac{v-u}{v+u}.$$

Както и трябва да се очаква, “безразличната” точка A се намира по-близо до спирка B. Ако скоростта на ученика е много по-малка от скоростта на автобуса, тази точка е около средата на пътя от B до C. При едни реални стойности за скоростите u = 1,5 m/s и v = 10 m/s, това отношение е $\approx$ 0,74.

Решихме задачата при предположение, че в момента, в който ученикът тръгва за училище, автобусът е на разстояние $\left(\frac{x}{u}\right)v$ преди спирка *B*. А ако не е? Ако разстоянието му до *B* е по-малко от предположеното, ученикът изпуска автобуса, към която и спирка да се насочи. Обратно – ако автобусът е на по-голямо разстояние от *B*, ученикът ще трябва да го почака, отново независимо към коя спирка е тръгнал.

И по-нататък.

1. Забележете, че представеното решение не зависи от интервала *T*, през който се движат автобусите. Това заключение противоречи на интуитивната представа, че ако автобусите са на рядко, т.е. този интервал е много голям, (напр. $T >> \frac{x+y}{u}$), тогава, независимо от съотношението между *x* и *y*, е почти все едно към коя от спирките ще се насочи ученикът. Обратно, при голяма честота на автобусите ($T << \frac{x+y}{u}$), отправяйки се към едната спирка, ученикът може да попадне в един автобус, а отправяйки се към другата – в друг. Това усложнява въпроса за оптималната стратегия, или, ако се върнем към началния въпрос, поставен в условието на задачата – усложнява намирането на онази точка между спирките, тръгвайки от която е без значение към коя спирка се насочва ученикът.

Анализът показва, че намереното решение е валидно само при определени стойности за интервала *T*. В какви граници лежат тези стойности?

2. Любителите на усложнения може да помислят върху подобна задача, в която обаче жилището на ученика не се намира на трасето на автобуса, а някъде встрани. При това положение, ако *x* и *y* отново представляват дължините на пътищата съответно от *A* до *B* и *C*, решението ще зависи и от дължината *s* на пътя на автобуса от *B* до *C*. В разгледания по-горе случай $s = x + y$, но сега, в зависимост от формата на улиците, е възможно както $s > x + y$, така и $s < x + y$.