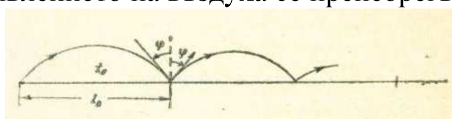
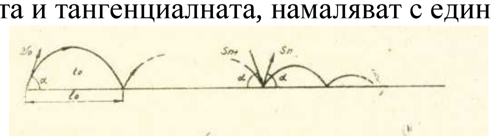
Подскачащо топче – 2

Задача. Тежко топче е хвърлено над хоризонтална равнина. Ударите на топчето в равнината са нееластични и при всеки от тях неговата кинетична енергия намалява γ пъти ($0 < \gamma < 1$), а ъглите на падане и отскачане са равни (фиг. 1). Да се намери след колко време и на какво разстояние от точката на хвърляне топчето ще спре, ако продължителността на полета му до първия удар е t_0, а разстоянието до точката на първия удар – l_0. (Съпротивлението на въздуха се пренебрегва.)



Фиг. 1.

Решение. От законите за движение на тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта, е известно, че ъглите между направленията на скоростта и хоризонта в началния момент и в момента на падане са равни. В условието се казва, че при всеки удар ъгълът на падане и ъгълът на отскачане също са равни. От тези две твърдения следва, че след всеки удар началната скорост, макар и все по-малка по големина, ще сключва един и същ ъгъл α с хоризонта (фиг. 2). Физически това е еквивалентно на предположението (твърде съмнително, между впрочем), че при удара двете компоненти на скоростта – нормалната и тангенциалната, намаляват с един и същ множител.



Фиг. 2.

Нека означим с v_n началната скорост, с която топчето започва полета си след n-тия удар. Според законите за движение на тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта, далечината l_n и продължителността t_n на полета на топчето от n-тия до (n + 1)-вия удар се описват с изразите:

(1) $$l_n = \frac{v_n^2}{g}\sin 2\alpha, \qquad t_n = 2\frac{v_n}{g}\sin\alpha .$$

Понеже топчето се удря безкраен брой пъти в равнината, общото разстояние, което то ще измине, и времето за движението му ще бъдат съответно:

(2) $$l = \sum_{n=0}^{\infty} l_n = \frac{1}{g}\sin 2\alpha \sum_{n=0}^{\infty} v_n^2 \quad \text{и} \quad t = \frac{2}{g}\sin\alpha \sum_{n=0}^{\infty} v_n .$$

За да пресметнем l и t, първо трябва да изразим v_n чрез зададените величини l_0 и t_0. Тъй като в момента преди n-тия удар кинетичната енергия на топчето е $\frac{1}{2}mv_{n-1}^2$, а в момента след удара – $\frac{1}{2}mv_n^2$, съгласно с условието на задачата съществува връзката:

$$\frac{1}{2}mv_n^2 = \gamma\frac{1}{2}mv_{n-1}^2 \qquad \text{или} \qquad v_n^2 = \gamma v_{n-1}^2 .$$

Последната рекурентна зависимост се решава лесно и получаваме:

$$v_n^2 = \gamma v_{n-1}^2 = \gamma^2 v_{n-2}^2 = \ldots = \gamma^n v_0^2 ,$$

където v_0 е началната скорост, с която е хвърлено топчето. Тогава за l и t от (2) намираме:

$$l = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^2 \qquad \text{и} \qquad t = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^{n/2} .$$

Съгласно с формулите (1) коефициентите пред двете суми са точно зададените в условието l_0 и t_0. Сумите се пресмятат по формулата за сума на безкрайна геометрична прогресия:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

така че окончателно получаваме:

(3) $$l = \frac{l_0}{1-\gamma} \qquad \text{и} \qquad t = \frac{t_0}{1-\sqrt{\gamma}}.$$

Вижда се, че тези формули добре описват двата гранични случая: когато $\gamma \to 1$ (абсолютно еластичен удар) и l, и t растат неограничено, т.е. топчето ще подскача върху равнината безкрайно дълго време и ще се отдалечи на безкрайно голямо разстояние от точката на хвърляне. В другия граничен случай, при $\gamma \to 0$ (абсолютно пластичен удар), то $l \to l_0$ и $t \to t_0$, т.е. топчето губи цялата си енергия още при първия удар и остава неподвижна върху равнината.