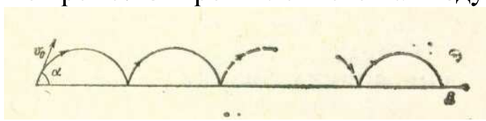
Подскачащо топче – 1

Задача. Т. A и т. B лежат върху хоризонтална равнина на разстояние l една от друга. Тежко топче е хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта с начална скорост v_0 от т. A към т. B. При какви ъгли на хвърляне топчето ще попадне в т. B, ако ударите му в равнината са абсолютно еластични? Под какъв ъгъл трябва да хвърлим топчето, за да стигне до т. B за най-кратко време? Съпротивлението на въздуха се пренебрегва.



Решение. От формулите за движение на тяло, хвърлено с начална скорост v_0 под ъгъл α спрямо хоризонтална равнина е известно, че далечината на полета се дава с израза:

(1) $$x = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha\,.$$

Ако разстоянието l между т. A и т. B и началната скорост са такива, че удовлетворяват неравенството $gl \le v_0^2$, съгласно с равенство (1) една стойност за търсения ъгъл можем да намерим от уравнението:

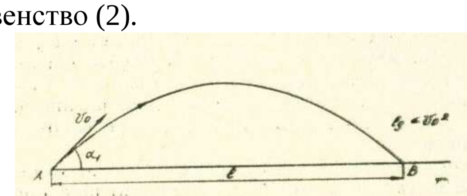
$$l = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha_1\,,$$

от което намираме:

(2) $$\alpha_1 = \frac{1}{2}\arcsin\frac{gl}{v_0^2}\,.$$

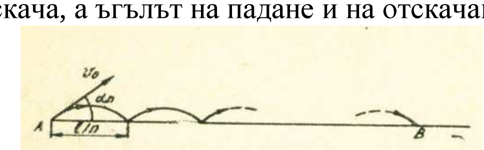
Известно е, че това равенство определя две стойности за търсения ъгъл – едната по-малка, другата – по-голяма от 45°. За опростяване по-нататък няма да разглеждаме втората възможност.

И така, ако началната скорост на топчето е достатъчно голяма, то може да попадне в т. B още при първия си удар в равнината (фиг. 1), стига да бъде хвърлено под ъгъл α_1, определен от равенство (2).



Фиг. 1.

Ние ще разглеждаме случая, когато началната скорост не е достатъчно голяма, за да може топчето да попадне направо в т. B, т.е. когато $gl \ge v_0^2$. В този случай топчето може да достигне т. B само след многократни удари в равнината. Нека означим с α_n началния ъгъл, под който трябва да хвърлим топчето, така че то да попадне в т. B при n-тия удар в равнината. Това означава, че далечината на полета между два последователни удара е $\frac{l}{n}$ (фиг. 2). Тъй като ударите са абсолютно еластични, големината на скоростта, с която топчето пада върху равнината, е равна на големината на скоростта, с която отскача, а ъгълът на падане и на отскачане винаги е равен на α_n.



Фиг. 2.

От формула (2) се вижда, че за да измине до първия си удар в равнината разстояние $\frac{l}{n}$, топчето трябва да бъде хвърлено спрямо хоризонта под ъгъл:

$$\alpha_n = \frac{1}{2}\arcsin\frac{gl}{nv_0^2}. \tag{3}$$

Тази формула показва, че съществуват безброй много начални ъгли на хвърляне (n = 1, 2, 3...), при които топчето попада в т. B. Минималният брой n_0 на ударите в равнината се определя от неравенството $n_0 v_0^2 \geq gl$. Тогава максималният ъгъл, под който хвърленото топче попада в т. B (при неговия n_0-вия удар в равнината), съгласно с формула (3) ще бъде:

$$\alpha_{n_0} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{gl}{n_0 v_0^2}.$$

При $n \geq n_0$ се получават безброй много други ъгли на хвърляне, при които топчето също попада в т. B, но след съответно по-голям брой удари в равнината.

Да намерим сега времето T_n, за което топчето, хвърлено под ъгъл α_n, изминава пътя до т. B. Ако означим с t_n времето между два последователни удара, то очевидно $T_n = nt_n$. От формулите за движение на тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта е известно, че t_n се дава с израза:

$$t_n = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha_n. \tag{4}$$

От (3) чрез известните формули от тригонометрията може да се пресметне, че:

$$\sin\alpha_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{gl}{n_0^2}\right)^2}}.$$

Като заместим този израз във формулата за t_n и използваме, че $T_n = nt_n$, за общото време на движение от т. A до т. B намираме:

$$T_n = \sqrt{2}n\frac{v_0}{g}\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{gl}{nv_0^2}\right)^2}}. \tag{5}$$

В задачата се търси още при какъв ъгъл на хвърляне (т.е. при какво n) T_n има минимална стойност. Ако във формула (5) вместо n пишем някаква непрекъсната променлива u, лесно може да проверим, че в интересуващата ни област $u > n_0 \geq 1$ функцията T_u е монотонно намаляваща (първата и производна по u е отрицателна). Следователно минималното време $T_{\min}$ ще се получи при $u \to \infty$ (т.е. при $n \to \infty$). Граничният преход се извършва лесно с помощта на приблизителната формула

$$\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |\varepsilon| << 1.$$

След провеждане на пресмятането се оказва, че:

$$T_{\min} = \frac{l}{v_0}. \tag{6}$$

В същото време от (3) се вижда, че при $n \to \infty$ ъгълът на хвърляне клони към нула, т.е. топчето ще достигне т. B най-бързо, ако го “хвърлим” хоризонтално, т.е. – ако просто го търкулнем. Това означава, че търкалянето можем да си го представяме като една безкрайна поредица от безкрайно близки един до друг еластични удари в равнината. Резултатът (6) показва, че това всъщност е равномерно праволинейно движение, т.е. еластичността на ударите осигурява движение на топчето по равнината без триене.