

За обмена на енергия при еластичен удар

Задача. Две еластични тела с известни маси и скорости се удрят централно. Съществува ли величина, която определя кое от телата ще увеличи енергията си след удара? Анализирайте условията, при които след удара едно от телата остава неподвижно.

Решение. Тъй като в условието не се говори за сили, действащи върху телата (т.е. те взаимодействат само в момента на удара и няма външни сили), за краткост под енергия ще разбираме тяхната кинетична енергия.

Маса, скорост и енергия се изключват от кръга на възможните отговори, защото лесно се намират примери, които показват, че при удар енергия може да придаде както по-лекото на по-тежкото тяло, така и обратно – по-тежкото на по-лекото; както по-бързото на по-бавното, така и обратно; както тялото с по-голяма енергия на тялото с по-малка енергия, така и обратно. За намиране на отговора са достатъчни законите за запазване на енергията и импулса.

Нека m и M ($m < M$) са масите на телата, v и V – проекциите на техните скорости в момента преди удара върху правата, минаваща през двата центъра на масите, а u и U – проекциите на съответните скорости след удара. За конкретност за положителна приемаме посоката на скоростта преди удара на по-масивното тяло (т.е. във всички случаи смятаме $V > 0$).

Законите за запазване на енергията и на импулса осигуряват две уравнения:

$$(1,а) \quad \frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{MU^2}{2} + \frac{mu^2}{2}$$

$$(1,б) \quad MV + mv = MU + mu,$$

чието съвместно решаване позволява да изразим u и U чрез v и V :

$$(2,а) \quad U = \frac{M-m}{M+m}V + \frac{2m}{M+m}v$$

$$(2,б) \quad u = \frac{m-M}{M+m}v + \frac{2M}{M+m}V.$$

От (2) за промяната на енергията на по-масивното тяло получаваме формулата:

$$(3) \quad \Delta E = \frac{MU^2}{2} - \frac{MV^2}{2} = \frac{2mM}{(M+m)^2} (MV + mv)(v - V).$$

(Очевидно същият израз, но с обратен знак, описва промяната на енергията на по-лекото тяло.)

Величината:

$$(4) \quad p = MV + mv$$

представява проекция на общия импулс на системата върху началната посока на движение на по-масивното тяло, така че окончателно:

$$(5) \quad \Delta E = \frac{2mM}{(M+m)^2} p(v - V).$$

Знакът на ΔE определя кой кому придава енергия: при $\Delta E < 0$ енергията на по-масивното тяло намалява, т.е. при удара то придава енергия на по-лекото и обратно – при $\Delta E > 0$ по-лекото тяло придава енергия на по-тежкото. Формула (5) показва, че за изясняване от какво зависи този знак, трябва да се разгледат два случая:

а) насрещен удар – при него $v < 0$ и знакът на разликата $(v - V)$ е фиксиран ($v - V < 0$), но знакът на импулса p е неопределен;

б) удар между еднопосочно движещи се тела – при него $v > 0$ и знакът на импулса $p > 0$ е фиксиран, но знакът на разликата $(v - V)$ е неопределен.

а) Насрещен удар. В този случай от $v - V < 0$ и (5) следва, че знакът на ΔE се определя единствено от знака на p . Тъй като преди удара посоките на импулсите на двете тела са противоположни, то отговорът на поставения въпрос е:

– Когато по големина импулсът на по-масивното тяло превишава импулса на по-лекото, то $p > 0$, $\Delta E < 0$, т.е. енергия се предава от по-масивното на по-лекото тяло.

– Когато по големина импулсът на по-лекото тяло превишава импулса на по-масивното, то $p < 0$, $\Delta E > 0$, т.е. енергията на по-масивното тяло расте за сметка на енергията на по-лекото.

Извод: Резултатите се изразяват удобно, ако говорим за *посока на преноса на енергия*, като под този термин разбираме посоката от тялото, което отдава енергия към тялото, което приема и увеличава енергията си. Тъй като и двата случая тялото с по-голям импулс предава енергия на тялото с по-малък импулс, заключението е, че при насрещен удар величината, която определя в коя посока се предава енергия е общият импулс на системата: енергията се предава по посока на импулса.

Следствие: Когато общият импулс на системата е нула ($\left|\frac{v}{V}\right| = \frac{M}{m}$), при удара телата не обменят енергия, което означава, че скоростите им се запазват по големина и само сменят посоката си на противоположната.

От формули (2) следват и определени заключения относно възможността след удара едно от телата да остане неподвижно или да смени посоката на движението си. Тъй като и $v < 0$, и $m - M < 0$, то двете събираеми в дясната страна на (2,б) са положителни и следователно $u > 0$, т.е. след насрещен удар по-лекото тяло не може да остане неподвижно и непременно сменя посоката на движението си.

Положението при по-масивното тяло е по-сложно. При относително бавно движение на лекото тяло масивното тяло просто забавя движението си след удара, като от (2,а) следва, че $U = 0$ при $v' = -\frac{M-m}{2m}V$, т.е. при тази стойност на v масивното тяло след удара остава в покой. При по-голяма скорост на по-лекото тяло ($v > v'$) и двете тела сменят посоките на скоростта си.

Тези изводи съответстват на интуитивните представи за последствията от насрещни удари.

б) Удар между еднопосочно движещи се тела. В този случай $V > 0$, $v > 0$, така че и $p > 0$, а знакът на ΔE се определя от знака на разликата $v - V$. При $v > V$, удар може да има когато по-лекото тяло настига по-масивното и в този случай от (5) следва $\Delta E > 0$, и енергията на масивното тяло расте. В другия случай, когато по-масивното тяло настига и удря по-лекото (т.е. $v < V$), $\Delta E < 0$ – по-масивното тяло отдава енергия на по-лекото.

Извод: При удар между еднопосочно движещи се тела енергия винаги печели по-бавното тяло, независимо от това, дали то е по-леко или по-масивно. И тъй като в този случай и началните скорости на телата, и общият импулс на системата са еднопосочни, отново можем да заключим, че преносът на енергия при удара е в посока на импулса на системата.

Този извод също съответства на интуитивната представа за последствията от ударите.

Тъй като в случая и двете събираеми в дясната страна на (2,а) са положителни, не е възможно след удара $U = 0$, т.е. не е възможно след удара по-масивното тяло да остане неподвижно. От (2,б) следва, че при $v'' = \frac{2M}{M-m}V > V$ след удара по-лекото тяло спира, а при скорост $v > v''$ след удара започва да се движи в обратна посока.

И така, общият извод е, че при насрещен удар може да се спре само по-масивно тяло, а при удар на едноръчно движещи се тела може да се спре само по-леко тяло.

Резултатите от разглеждането на случаите а) и б) може да се обобщят във вида:

При централен еластичен удар между две тела посоката на предаване на енергията съвпада с посоката на общия импулс на системата.

Следователно отговорът на въпроса, зададен в условието на задачата е: при централен еластичен удар между две тела величината, която определя посоката на предаване на енергия е **общият импулс на системата**.

Тема за размисъл: Възможно ли е да се направят подобни разглеждания, но засягащи не енергиите, а импулсите на удрящите се тела?