

Хидростатика плюс ...

Задача. В цилиндричен съд с вертикални стени има течност, равнището на която е на височина H над дъното му. Върху стените на съда, един над друг на височина съответно h_1 и h_2 са направени два отвора.

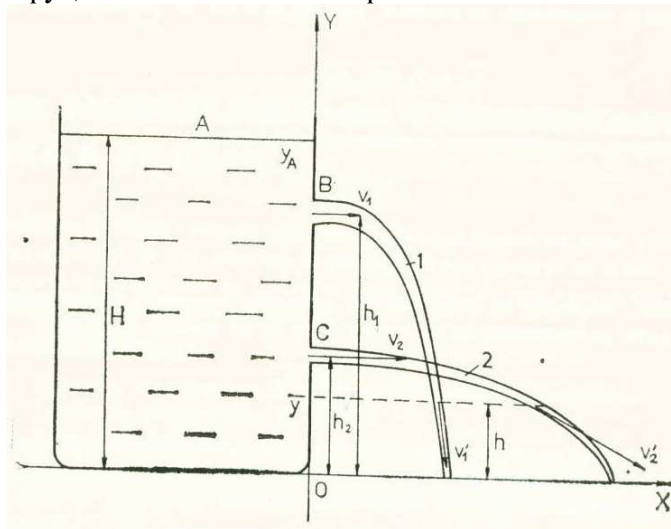
А) Покажете, че скоростите на изтичащите струи на височина h зависи само от H и h , но не и от височините на отворите, от които изтичат.

Б) При какво съотношение между площите на отворите количествата течност, изтичащи през всеки от тях за единица време, ще бъдат равни?

В) Покажете, че ако това съотношение между площите на отворите е изпълнено, напречните сечения на двете струи на една и съща височина над основата са равни?

Смятайте, че съдът е достатъчно широк, така че скоростта на спадане на равнището на течността в него е пренебрежимо малка спрямо скоростите на изтичащите струи. Течността е несвиваема, без вътрешно триене.

Решение. Да въведем координатна система xOy като показаната на фиг. 1. Ще използваме следните означения: g – земното ускорение, y – височината на малък елемент от някоя струя, v – големината на скоростта на този елемент.



Фиг. 1.

А) Нека свободната повърхност A на течността в съда се намира на височина $y_A = H$, а отворът B – на височина $y_1 = h_1$. Елемент от течността, който напуска отвора B в момент $t_0 = 0$ със скорост $\vec{v}_1 = (v_1, 0)$, достига височина $y = h$ в момент t_1 със скорост, чиито компоненти са:

$$(1) \quad v_x = v_1 \quad \text{и} \quad v_y = -gt_1,$$

а координатите на точката, до която е достигнал са:

$$(2) \quad x = v_1 t_1 \quad h = h_1 - \frac{1}{2} g t_1^2.$$

От (1) за големината на скоростта намираме:

$$(3) \quad v^2 = v_1^2 + g^2 t_1^2.$$

Скоростта на изтичане се определя от формулата на Торичели:

$$(4) \quad v_1^2 = 2g(H - h_1).$$

Като определим от (2) $t_1^2 = \frac{2}{g}(h_1 - h)$ и го заместим заедно с v_1^2 от (4) в (3), получаваме:

$$(3a) \quad v^2 = 2g(H - h).$$

Следователно наистина големината на скоростта на струята на дадена височина не зависи от височината на отвора, от който е изтекла.

Б) Условието за равенството на количествата течност, изтичащи за единица време от двата отвора се осигурява от равенството на обемите им:

$$(5) \quad v_1 S_1 = v_2 S_2,$$

където S_1 и S_2 са площите на съответните отвори. Оттук и от формулата на Торичели следва:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{H - h_2}{H - h_1}}.$$

В) Всяка от двете струи представлява токова тръба и, тъй като течността е несвиваема, през всички напречни сечения на една струя за единица време преминава едно и също количество течност. Следователно, ако с S_1' и S_2' означим площите на напречните сечения на двете струи на една и съща височина h , като отчетем че съгласно (3а) там скоростите на струите са равни, можем да запишем равенствата:

$$S_1 v_1 = S_1' v \quad \text{и} \quad S_2 v_2 = S_2' v.$$

Като ги разделим почленно и отчетем равенство (5), получаваме:

$$\frac{S_1'}{S_2'} = 1,$$

което трябваше да се докаже.

... на струите последните разглеждаме като токови тръби. Поради несвиваемостта на течността и непрекъснатостта на струите, количеството течност, преминало за единица време през площта на отвора S_i ($i=1, 2$), е равно на количеството течност, преминало за единица време през напречното сечение S_i' на струята, намиращо се на височина $h < h_i$. Както бе показано по-горе, този факт се изразява чрез равенство на съответните потоци на течността и може да бъде записан като

$$(7) \quad \begin{aligned} v_1 S_1 &= v_1' S_1' \\ v_2 S_2 &= v_2' S_2' . \end{aligned}$$

Чрез почленно деление на равенствата (7) и отчитане на (5б), получаваме

$$(7a) \quad \frac{v_1' S_1'}{v_2' S_2'} = 1.$$

От (3а) следва равенството на двете струи на височина h :

$$v_1' = v_2',$$

което позволява да запишем (7а) като равенство на площите на напречните сечения на струите на една и съща височина над дъното на съда:

$$(8) \quad S_1' = S_2',$$

което трябваше да докажем.