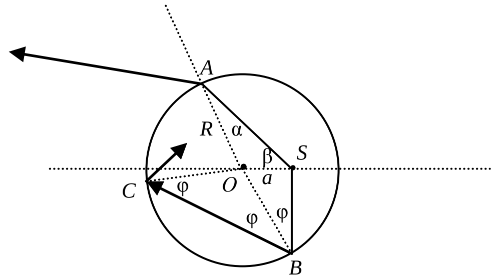
Пълно вътрешно отражение в кълбо

Задача. Точков източник на светлина S се намира в прозрачно кълбо с радиус R и показател на пречупване $n > 1$ (фиг. 1). При кои положения на източника съществуват лъчи, които не напускат кълбото?



Фиг. 1.

Анализ. Един лъч не напуска кълбото, ако при срещата си със сферата, която го огражда, претърпи пълно вътрешно отражение. Наистина, ако допуснем, че ъгълът на падане φ на лъча в т. B е по-голям от граничния ъгъл, той ще претърпи пълно вътрешно отражение (вж. фиг. 1). Поради това обаче, че триъгълникът OBC е равнобедрен, следващият ъгъл на падане също е φ, в т. C също настъпва пълно вътрешно отражение и т.н. – лъчът не напуска кълбото.

Следователно задачата се свежда до това да се намери при кои положения на източника S има лъчи, които търпят пълно вътрешно отражение от повърхността на кълбото.

Решение. Критичният ъгъл $\alpha_{\text{гр.}}$, след който настъпва пълно вътрешно отражение, се определя от равенството:

(1) $$\sin\alpha_{\text{гр.}} = \frac{1}{n}.$$

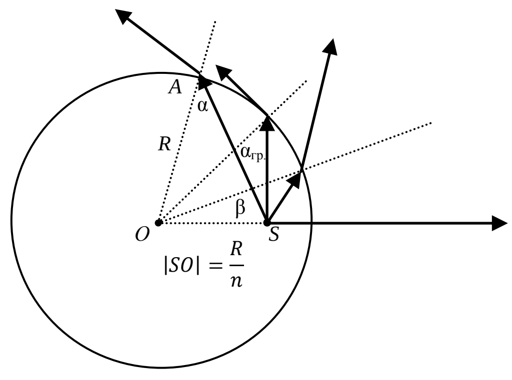
Да намерим връзка между ъгъла β, който един излизащ от S лъч сключва с посоката от източника към центъра O на кълбото, и ъгъла на падане α, под който този лъч среща границата на кълбото. Ако означим с $a = |SO|$ разстоянието между източника и центъра на кълбото, според синусовата теорема, приложена за триъгълника OSA:

(2) $$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{R} \quad \text{или} \quad \sin\alpha = \frac{a}{R}\sin\beta.$$

При фиксирано положение на източника (фиксирано a) за излизащите от S лъчи ъгъл β се променя в граници от 0 до π и синусът му има максимум при β = π/2. От формула (2) се вижда, че ъгълът на падане може да достигне критичната стойност, при която е изпълнено условието (1), ако разстоянието на източника до центъра е поне:

(3) $$a = \frac{R}{n}.$$

В този случай критичният ъгъл се достига само от лъчите, за които $\beta = \frac{\pi}{2}$ т.е., които са перпендикулярни на отсечката SO.



Фиг. 2.

На фиг. 2 са показани траекториите на четири лъча за случая, в който разстоянието от източника до центъра на кълбото е точно $\frac{R}{n}$.

Когато $a = |SO| > \frac{R}{n}$, т.е. при $\frac{R}{an} < 1$, уравнението:

$$sin\beta = \frac{R}{an}$$

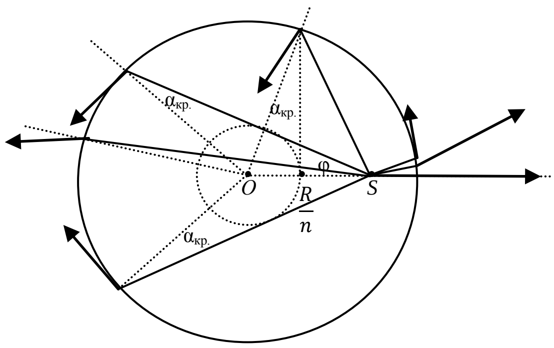
има два корена:

(4) $$\varphi = \arcsin\frac{R}{an} \quad \text{и} \quad \pi - \varphi = \pi - \arcsin\frac{R}{an}.$$

За всички ъгли от интервала $(\varphi, \pi - \varphi)$ е изпълнено неравенството $sin\beta \geq \frac{R}{an}$, така че за лъчите, които излизат от S под ъгли в този интервал, е изпълнено условието:

(5) $$sin\alpha = \frac{a}{R}\sin\beta \geq \frac{a}{R}.\frac{R}{an} = \frac{1}{n} = \sin\alpha_{\text{гр.}}.$$

Неравенство (5) показва, че тези лъчи търпят пълно вътрешно отражение и не могат да напуснат кълбото. Примерният вид на няколко лъча в този случай е показан на фиг. 3.



Фиг. 3.

От фигурата се вижда и как при зададено положение на източника може да се построи ъгълът φ: двата лъча, които излизат от S и са допирателни към окръжността с център т. O и радиус R/n, сключват с OS ъгъл φ, а продълженията им в обратна посока – ъгъл $\pi - \varphi$.

И така, когато разстоянието от източника до центъра на кълбото е по-малко от R/n, всички лъчи напускат кълбото – нито един лъч не може да претърпи пълно вътрешно отражение, независимо от посоката, в която е излъчен. Когато това разстояние е по-голямо от R/n, само лъчите, сключващи с посоката от S към O ъгли, по-малки от φ или по-големи от $\pi - \varphi$, напускат кълбото, а всички останали се разпространяват вътре в него. (Напускащите лъчи изпълват двете части на конус с ос SO, с връх в т. S и ъгъл при върха 2φ.)

Изразен по-малко по-друг начин, отговорът на въпроса от условието на гадачата гласи:

Един лъч напуска кълбото само, ако той или неговото продължение в обратна посока пробождат сферата с център в т. O и радиус R/n.

Оттук следва и едно интуитивно ясно заключение: независимо от положението на източника, колкото по-голяма е стойността на показателя на пречупване, толкова по-малко лъчи напускат кълбото (защото радиусът R/n намалява).

Неочаквано следствие. Решението на една от качествените задачи показва, че ако лъч проникне от въздуха в прозрачно кълбо с $n > 1$, колкото и отражения да претърпи вътре в кълбото, лъчът непременно ще го напусне (с други думи, той не може да претърпи пълно вътрешно отражение). Оттук и от резултата на натоящата задача следва, че всеки проникнал отвън в кълбото лъч непременно пробожда и сферата с център в т. *O* и радиус *R/n*.

Коментар. Интересно е да се проследи видът на лъч, излизащ от *S* перпендикулярно на отсечката *SO*, когато източникът е много близо до повърхността на кълбото. Тъй като търпи пълно вътрешно отражение, този лъч представлява начупена линия, състояща се от множество къси отсечки, разположени близо до сферата. И колкото по-близо до повърхността е източникът, толкова по-къси са чупките на лъча. Тази ситуация изкушава да се разгледа граничният случай, в който *S* е върху самата сфера – тогава лъчът би трябвало да обикаля по окръжност, разположена на повърхността на кълбото.

Подобно заключение обаче би било погрешно, защото се отнася до случай, който излиза извън областта на валидност на геометричната оптика: върху сферата показателят на пречупване търпи скок, там той не е дефиниран и затова уравненията, въз основа на които направихме заключението, губят смисъл.