

Успоредно свързани съпротивления

Задача. Според формулата $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ съществуват безброй много комбинации

от съпротивления R_1 и R_2 , които, свързани успоредно, са еквивалентни на едно отнапред зададено съпротивление R . Покажете, че за всяка целочислена стойност на R могат да се подберат поне две различни комбинации от целочислени стойности на съпротивленията R_1 и R_2 така, че свързани успоредно, да бъдат еквивалентни на R .

Решение. Един опитен електротехник веднага би посочил едно решение на задачата: ако $R_1 = R_2 = 2R$, то еквивалентното съпротивление на свързаните успоредно R_1 и R_2 ще бъде точно R , и ако стойността на R е целочислена, очевидно такива ще бъдат и стойностите на R_1 и R_2 . Условието на задачата обаче изисква да се покаже, че съществува поне още едно решение. Един начин за намирането му е следният.

Тъй като еквивалентното на две успоредно свързани съпротивления е по-малко от всяко от свързаните съпротивления, можем да положим:

$$(1) \quad R_1 = R + x \quad \text{и} \quad R_2 = R + y,$$

където x и y са цели положителни числа. Заместването на полаганията (1) във формулата за еквивалентното съпротивление, след освобождаване от знаменателите и унищожаване на еднаквите членове води до равенството:

$$(2) \quad R^2 = xy.$$

За всяка целочислена стойност на R това уравнение има поне две целочислени решения за x и y : $x' = y' = R$, и $y'' = 1$, $x'' = R^2$ (решението $y = R^2$, $x_2 = 1$ не е съществено различно от предишното). Според формула (1) на тези решения отговарят стойности на съпротивленията $R_1 = R_2 = 2R$ (т.е. – посоченото по-горе решение), и съответно $R_1 = R^2 + R$, $R_2 = R + 1$, които, при целочислено R , очевидно също са целочислени. (Не се смущавайте от факта, че в последните равенства като че ли участват величини с различни размерности – напр. R^2 и R – в случая се касае за *числени* стойности).

В съответствие с формула (2), броят на начините, по които може да се подберат стойностите на R_1 и R_2 е равен на броя на начините, по които R^2 може да се представи като произведение от две цели числа.