Принцип на непрекъснатостта

Съществува една класическа качествена задача, чието решение се опира на математическия *принцип на непрекъснатостта* и изисква не толкова познаване на физиката, колкото способност за разсъждаване.

Задача. От местността Паниците край Калофер в 8 часа сутринта турист тръгва към връх Ботев и след 6 часа достига целта. На върха преспива[1] и на другата сутрин, отново в 8 часа, тръгва обратно по същия маршрут. Докажете, че по пътя му има такова място, през което той е минал и на отиване, и на връщане в един и същи час, минута и секунда от денонощието.

Анализ. Единственото, което се знае със сигурност за движенията нагоре и надолу, е, че имат обща траектория и че началото им е в един и същ час. Характерът на движенията е напълно произволен: те са с различни и, изобщо казано, непостоянни скорости. Може да се предполага, че средната скорост при изкачването е по-малка отколкото при слизането, че и в двете посоки туристът е правил произволен брой почивки с произволна продължителност и т.н.

Това е типична задача за **доказване на съществуване**. Оскъдните данни за характера на движенията изключват възможността да се търси на какво разстояние от върха се намира въпросната точка и в кой момент туристът я достига на отиване и на връщане.

Решение. Един от елегантните начини за доказателство на съдържащото се в условието твърдение е следният. Представете си, че още първия ден, точно в 8 часа от върха започне да се спуска друг, да го наречем виртуален турист, като неговият „закон за движение" (т.е. скорост, почивки и т.н.) е точно копие на движението на реалния турист през втория ден. Очевидно е, че реалният и виртуалният турист непременно ще се срещнат – те се движат един срещу друг по една и съща траектория! Мястото на тази мислена среща е търсената точка. В нея реалният турист при слизане ще се окаже в същия час, минута и секунда от денонощието, в които е преминал през нея и на изкачване, и така съществуването на такава точка е доказано.

Коментар. За да поясним какво отношение има тази задача към принципа за непрекъснатост, е добре да илюстрираме решението ѝ графически. На фиг. 1 по хоризонталната ос е нанесено времето, а по вертикалната ос – дължината на изминатия път от т. П (м. Паниците) до съответния момент от време.

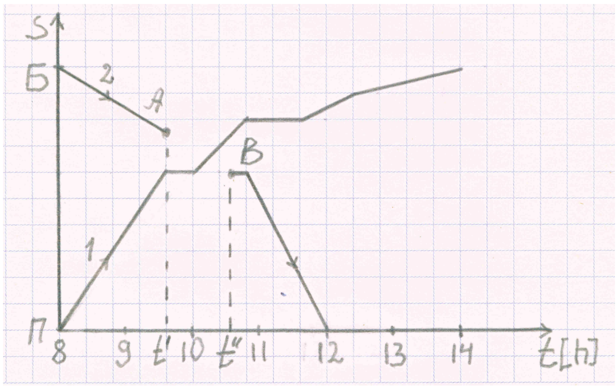
Фиг. 1

Кривата 1 е примерна графика на изминатия от туриста път в зависимост от времето *при изкачването*, т.е. това **не е** траекторията на движение. Ако я проследите подетайлно, ще разберете къде пътят е бил по-стръмен (и скоростта – по-малка), кога туристът е правил почивки и т.н.

[1] Преди години спането на върха наистина бе възможно – в старата метеорологична станция.

Кривата 2 е графика на изминатия от туриста (реален или виртуален) път в зависимост от времето *при слизане* от върха. Според условието на задачата тази крива започва от върха в същия час, в който е започнало изкачването предишния ден. И тъй като слизането обикновено става с по-голяма средна скорост, то и моментът, в който туристът слиза в Паниците, е по-ранен от момента, когато е достигнал върха.

Обстоятелството, че двете криви имат пресечна точка, е графичен израз на казаното с думи в решението. И в двата случая използваме неявно факта, че **движението е непрекъснато**. Какво би могло да се случи, ако движенията нямат това свойство, ако пространството и/или времето имат дискретна структура? Би могло, например, да се случи изобразеното на фиг. 2. На нея движението на туриста при слизане в момента *t*' *се прекъсва* в т. *A*, след което в момент *t*" се възстановява, но в друга точка – в т. *B*. В този случай вече няма час и минута, в които и на отиване, и на връщане туристът да е бил на едно и също място. Разбира се, подобна ситуация е невъзможна, именно защото движенията са **непрекъснати**.



Фиг. 2.

Последното твърдение е като че ли излишно категорично – на микроравнище, където са валидни законите на квантовата механика, нещата стоят по друг начин. За щастие, туристите са макрообекти и за описание на техните движения класическите представи са напълно подходящи.

Допълнение. При решаване на задачата наблегнахме на значението на непрекъснатостта на пространството и времето. Математиците обаче имат по-друг поглед върху проблема. М. Гарднер[2] например разглежда решението като илюстрация на това, което в топологията се нарича *теорема на неподвижната точка*, теорема, доказана през 1912 г. от холандския математик Брауер. Като впечатляващи примери за следствия от тази теорема се сочат твърденията, че във всеки момент време върху земната повърхност съществуват поне две диаметрално разположени точки със съвпадащи стойности на температурата и атмосферното налягане; че във всеки момент поне в една точка от земната повърхност няма вятър и др.п.

[2] **Гарднер М.** *А ну-ка, догадайся!*, М., “Мир”, 1984.