g на новооткрита планета

Задача. Астрономите открили сферична планета с радиус R = 6400 km, повърхността на която е равномерно покрита с вода. Оказва се, че на дълбочината x под водата, с точност до величини от първи порядък спрямо отношението x/R ускорението на свободно падане не зависи от x. Намерете големината на това ускорение, ако гравитационната константа е $\gamma = 6{,}67.10^{-11}$ N.m^2/kg^2, а плътността на водата $\rho = 1000$ kg/m^3.

Решение. Решението се опира на две свойства на гравитацията:

А) Гравитационната сила, с която едно хомогенно кълбо привлича други тела, не се променя, ако цялата маса на кълбото е съсредоточена в центъра му, т.е. в това отношение то се държи като материална точка. Това свойство се запазва и когато кълбото не е хомогенно, стига разпределението на масите в него да притежава сферична симетрия. Това е и случаят, описан в условието на задачата – планета с някакво твърдо хомогенно ядро, около което има равномерен слой вода.

Б) Във вътрешността на сфера, по повърхността на която са разположени равномерно маси, не действат гравитационни сили – там интензитетът на гравитационното поле е нула.

Според първото от двете свойства и закона на Нютон за гравитацията, силата на тежестта, която действа върху тяло с маса m, плаващо на повърхността на океана, който обгръща планетата е:

$$G = \gamma \frac{mM}{R^2}.$$

където M е масата на планетата. Оттук и от равенството $G = mg$, което всъщност дефинира ускорението на свободното падане g_0 на повърхността на планетата, намираме:

(1) $$g_0 = \gamma \frac{M}{R^2}.$$

За да изразим ускорението на свободното падане g на дълбочина x под повърхността на океана си представяме, че слоят вода с дебелина x е съставен от множество безкрайно тънки концентрични водни слоеве. Съгласно второто от посочените по-горе свойства, те не създават гравитационно поле в точката, която отстои на разстояние (R – x) от центъра на планетата. По аналогия с формула (1), на въпросната дълбочина ускорението на свободно падане е:

(2) $$g(x) = \gamma \frac{M(x)}{(R-x)^2},$$

където $M(x)$ е масата на кълбото с радиус (R – x). Тъй като обемът на сферичния слой е $(4/3)\pi[R^3 - (R-x)^3]$, то $M(x)$ е разлика от масата M на планетата и масата на слоя:

(3) $$M(x) = M - \frac{4}{3}\pi\rho\left[R^3 - (R-x)^3\right].$$

От (2) и (3) следва, че:

(4) $$g(x) = \gamma \frac{M - \frac{4}{3}\pi\rho\left[R^3 - (R-x)^3\right]}{(R-x)^2}.$$

Разбира се, формула (4) е вярна само докато x е по-малко от дълбочината на океана – в противен случай играе роля и плътността на твърдата част на планетата.

Според условието на задачата, с точност до членове от първи порядък спрямо отношението x/R е изпълнено равенството $g_0 = g(x)$. За да получим следствия от това твърдение, първо с помощта на формули (1) и (4) записваме равенство:

$$\frac{M}{R^2} = \frac{M - \frac{4}{3}\pi\rho\left[R^3 - (R-x)^3\right]}{(R-x)^2}.$$

За да отделим членовете от порядък $(x/R)^2$ и по-висок, които следва да пренебрегнем, е удобно да препишем равенството във вида:

$$M(R-x)^2 = MR^2 - \frac{4}{3}R^2\pi\rho\left[R^3 - (R-x)^3\right],$$

или:

$$MR^2\left(1-\frac{x}{R}\right)^2 = MR^2 - \frac{4}{3}\pi\rho R^5\left[1-\left(1-\frac{x}{R}\right)^3\right].$$

След като съкратим на R^2 и използваме, че:

$$\left(1-\frac{x}{R}\right)^2 = 1-2\frac{x}{R}+\left(\frac{x}{R}\right)^2 \approx 1-2\frac{x}{R}$$

$$\left(1-\frac{x}{R}\right)^3 = 1-3\frac{x}{R}+3\left(\frac{x}{R}\right)^2-\left(\frac{x}{R}\right)^3 \approx 1-3\frac{x}{R},$$

за масата на планетата получаваме израза:

(5) $$M = 2\pi\rho\gamma R^3.$$

Като заместим този резултат във формула (1), намираме и търсеното ускорение:

(6) $$g_0 = 2\pi\rho\gamma R.$$

Тъй като плътността на водата е известна, от (6) получаваме, че ускорението на свободното падане на планетата е $g_0 = 2{,}6\ \mathrm{m/s^2}$.

Коментар. Формула (5) изразява странния в известен смисъл факт, че масата на планетата е само малко по-голяма ($2 > 4/3$) от масата, която би имала, ако бе изцяло от вода. (Разбира се, това е резултат от не по-малко странната независимост на g от дълбочината x.) Това може да се дължи на два фактора: или океанът е извънредно (в сравнение с радиуса R) дълбок и фактически по-голямата част от планетата е вода, или океанът е плитък, но плътността на твърдото ядро не е много по-голяма от плътността на водата. Ако освен по стойността на радиуса си, планетата прилича и по други свои характеристики на Земята, можем да предположим, че се реализира вторият случай.

Теми за размисъл. 1. Ако владеете диференциалното смятане, изследвайте зависимостта $g = g(x)$, зададена с формула (4). Като пресметнете $\mathrm{d}g/\mathrm{d}x$ ще установите, че когато масата на планетата е по-голяма от определената с формула (5), с потапяне в дълбините на океана $g(x)$ отначало расте и след достигане на една максимална стойност, започва да намалява, като при $x = R$, (т.е. в центъра на планетата) $g = 0$. Ако ли пък общата маса на планетата е по-малка от определената с формула (5), тогава $g(x)$ монотонно намалява с увеличаване на x до достигане на същата стойност $g = 0$. И само при $M = 2\pi\rho R^3$ е изпълнено равенството $\mathrm{d}g/\mathrm{d}x = 0$, което гарантира, че с точност до величини от първи порядък спрямо x/R ускорението на свободното падане не зависи от дълбочината на потапяне в океана.

2. Въз основа на получените резултати направете заключение за това, дали g ще намалява или ще расте, при потапяне в дълбините на земния океан. (Абстрахирайте се от факта, че той не покрива равномерно земната повърхност.)