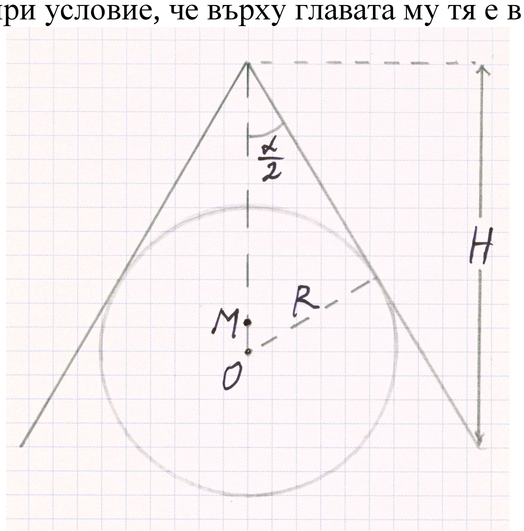
Шапката на Пинокио

Майстор Джепето направил от ламарина конусообразна шапка за Пинокио. Триенето между ламарината и облата дървена глава на Пинокио обаче е нищожно. Дали при това положение малкото дървено човече ще може да носи шапката си?

Задача. Шапката на Пинокио представлява конус с ъгъл при върха $\alpha = 60^\circ$ и височина $H = 20$ cm. Ще се задържи ли тя върху дървената му глава, която представлява сфера с диаметър $D = 15$ cm, ако триенето между ламарината и дървото е пренебрежимо малко?

Анализ. Ясно е, че ако оста на конуса е вертикална, шапката ще остане на мястото си. Ако обаче това равновесно положение е неустойчиво, при най-малкото движение на човечето конусът ще се наклони на една страна и ще падне. Пинокио ще може да ползва шапката си само при условие, че върху главата му тя е в устойчиво равновесие.



Фиг. 1.

Една система е в устойчиво равновесие, когато центърът на тежестта ѝ заема най-ниското измежду възможните положения. На фиг. 1 т. O е център на главата на Пинокио, а т. M – център на масите на шапката му. Ако ситуацията е като изобразената на фигурата, т.е. ако т. M е по-ниско от т. O, при едно малко накланяне на шапката, т.е. при малко отклонение на т. M от вертикалата, центърът на масите на шапката би слязъл надолу. Следователно в този случай равновесието на конуса е неустойчиво.

Обратно – ако т. M е под т. O, при отклоняване от вертикалата т. M се изкачва нагоре, т.е. в случая положението е устойчиво.

Следователно за решаване на задачата трябва да се анализира относителното разположение на т. M спрямо т. O.

Решение. Според анализа трябва да се определи положението на центъра на масите на кух конус. За целта мислено разделяме конуса на тесни пръстени с помощта на равноотдалечени една от друга равнини, перпендикулярни на неговата ос. Масата на всеки пръстен е правопропорционална на разстоянието до върха на конуса, а центърът на масите му лежи върху оста на конуса. Ако след това (отново мислено) "сплескаме" конуса така, че всеки пръстен се превърне в равнобедрен трапец, целият конус ще се превърне в двоен равнобедрен триъгълник. Неговият ъгъл при върха вече няма да бъде 60°, а по-голям. Лесно може да се съобрази, че синусът от половината на този ъгъл ще бъде $\pi/4$, т.е. тази половинка ъгъл е почти 52°. Това обаче е без значение – същественото в случая е, че центърът на масите на всеки от пръстените не променя положението си, не се променя и височината на триъгълника. Оттук заключаваме, че не се измества и търсеният център на масите на целия конус – т. M.

Така проблемът за намиране местоположението на т. M се свежда до намиране центъра на масите в равнобедрен триъгълник с височина H. Известно е обаче, че център на масите на триъгълник е пресечната точка на медианите. От планиметрията е известно още, че тази пресечна точка дели всяка от медианите в отношение 2:1. И тъй като височината в равнобедрения триъгълник е същевременно и медиана, следа да заключим, че т. M, центърът на масите на конуса се намира на разстояние $\frac{2}{3}H$ от върха на конуса.

От фиг. 1 се вижда, че т. O – центърът на сферата отстои от върха (т. A) на разстояние:

(1)
$$\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{R}{\sin 30^0} = 2R.$$

И тъй като медианата в случая има дължина H, условието за устойчивост на конуса се изразява с неравенството:

(2) $2H/3 > 2R = D$ или $H > 3D/2$.

Тъй като според условието на задачата $H = 20$ cm, а $3D/2 = 3.15/2 = 22{,}5$ cm, неравенство (2) не е изпълнено. Заключението е ясно – Пинокио не би могъл да носи шапката си, освен ако не притежава ловкостта на жонгльор и се движи така, че оста й да остава винаги вертикална.

Коментар. И все пак: възможно ли е Пинокио да ползва успешно ламаринена шапка с конусообразна форма? За да отговорим на въпроса отбелязваме, че разполагаме с два параметъра, които Джепето може да променя – височината H на шапката и ъгъла α при върха на конуса (размера на главата на куклата все пак смятаме за зададен – не е реалистично да се надяваме, че майсторът ще престърже главата на Пинокио, за да осигури стабилност на шапката му).

Първата възможност е да запазим ъгъла при върха на конуса, но да увеличим височината му H така, че да бъде изпълнено неравенство (2), т.е. $H > 3D/2$. Тъй като разстоянието от върха на шапката до центъра на главата на Пинокио е $D = 2R$, от това неравенство следва, че периферията на шапката е под брадата на куклата. Очевидно подобна шапка, макар и стабилна, не е удобна – Пинокио няма да вижда какво става около него.

Втората възможност е при зададено H да увеличаваме ъгъл α при върха на конуса. Тъй като разстоянието от центъра на главата до върха на конуса е $\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, а от центъра на масите на конуса до върха – отново $2H/3$, условието за стабилност на шапката се изразява с неравенството:

$$\frac{2}{3}H > \frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad \text{или} \qquad \sin\frac{\alpha}{2} > \frac{3}{2}\frac{R}{H}.$$

При зададените в условието значения на величините това означава, че шапката ще бъде стабилна, ако ъгълът при върха на конуса е не 60°, а почти 70°.

Направете пресмятане и проверете дали и в този случай периферията на шапката ограничава кръгозора на Пинокио. Ако и сега случаят е такъв, Джепето ще трябва или да промени модела на шапката, или да я прави от материал, който има достатъчно голям коефициент на триене с дървото.