

Скиор по писта с променлив наклон

Задача. Скиор започва да се спуска по писта с променлив наклон. Каква скорост ще придобие скиорът след като се спусне от височина H , а в хоризонтално направление измине път L ? Коефициентът на триене на скиите в снега е k , а съпротивлението на въздуха се пренебрегва.

Анализ. Задачата допуска енергетично решение. В системата Земя – скиор действат една консервативна сила – тежестта $G = mg$ (m – масата на скиора, g – земното ускорение), и една неконсервативна сила – триенето $f_{\text{тр}}$. Наличието на триене показва, че механичната енергия на системата намалява – нейната промяна е равна на работата на силата на триене.

Решение. Разглеждаме две състояния на системата: начално, когато започва спускането, и крайно – след като скиорът във вертикално направление е изминал разстояние H . Ако отчитаме потенциалната енергия от равнището на крайното състояние, в него механичната енергия E_2 на системата е само кинетична и равна на:

$$(1) \quad E_2 = \frac{mv^2}{2},$$

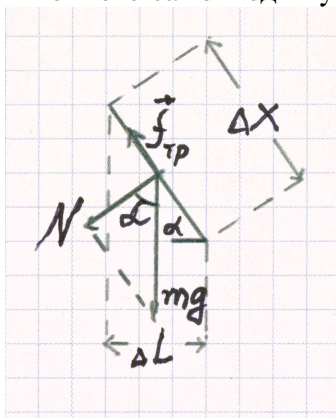
където v е търсената скорост. В началното състояние системата притежава само потенциална енергия:

$$(2) \quad E_1 = mgH.$$

Според казаното по-горе, енергиите на началното и на крайното състояние са свързани с работата на силата на триене чрез равенството:

$$(3) \quad E_1 - E_2 = -A_{\text{тр}}.$$

За да намерим скоростта v , трябва първо да пресметнем работата на силата на триене. За целта разглеждаме движението само в един участък, чиято малка дължина



Фиг. 1.

Δx позволява да го смятаме праволинеен (фиг. 1). От фигурата се вижда, че нормалният натиск на скиите върху снега е $N = mg \cos \alpha$, където α е ъгълът между участъка и хоризонталната равнина. Следователно големината на силата на триене по този участък е:

$$(4) \quad f_{\text{тр}} = kmg \cos \alpha.$$

Тъй като посоката на триенето е противоположна на посоката на движение, неговата работа по този участък ще бъде:

$$(5) \quad \Delta A_{\text{тр}} = -f_{\text{тр}} \Delta x = -kmg \Delta x \cos \alpha.$$

От друга страна величината:

$$(6) \quad \Delta L = \Delta x \cos \alpha$$

представлява преместването на скиора в хоризонтално направление, така че изразът за работата на триенето по участъка Δx може да се запише във вида:

$$(7) \quad \Delta A_{\text{тр}} = -kmg \Delta L.$$

Общата работа на триенето получаваме чрез сумиране на всички изрази $\Delta A_{\text{тр}}$ и резултатът очевидно е:

$$(8) \quad A_{\text{тр}} = -kmgL,$$

където L е общото преместване в хоризонтална посока.

Като заместим получените изрази за E_1 , E_2 и $A_{\text{тр}}$ от (2), (1) и (8) в (3), получаваме равенството:

$$(9) \quad mgH - \frac{mv^2}{2} = kmgL,$$

от което намираме търсената скорост:

$$(10) \quad v = \sqrt{2g(H - kL)}.$$

Коментар. Първото обстоятелство, което заслужава внимание е, че формула (10) описва и скоростта, която би придобил скиорът, ако се спуска по писта с постоянен наклон. Допуска ли този факт някакво физично тълкуване?

Второ, очевидно решението има смисъл само при изпълнение на неравенството:

$$(11) \quad H > kL.$$

Отношението H/L представлява тангенс от ъгъла между усреднения наклон на пистата и хоризонталната равнина. От тази гледна точка условието (11) съвпада с познатото условие, което определя кога едно тяло може да преодолее триенето и да се хлъзга по наклонена **равнина**. Като умножим двете страни на (11) с mg получаваме условието:

$$mgH > kmgL,$$

чиито физичен смисъл е ясен: за да стигне до края на пистата, потенциалната енергия на скиора в началото трябва да бъде по-голяма от работата на триенето при спускането.

Изпълнението на неравенство (11) обаче не е гаранция, че скиорът ще стигне до края на пистата. Наистина, представете си, че нейният начален участък е почти хоризонтален и съставлящата на тежестта, успоредна на пистата не може да преодолее триенето – тогава ските въобще няма да тръгнат. Ако подобен участък има по средата на пистата, той може да бъде преодолян благодарение вече придобитата кинетична енергия, но дали това ще стане или не, зависи от наклона и от дължината на този участък.

От тази гледна точка условието на задачата не е съвсем коректно. По-правилно би било въпросът да се постави по следния начин: Каква скорост би придобил скиор при коефициент на триене на ските в снега k , ако профилът на пистата позволява той да се спусне от височина H , изминавайки в хоризонтално направление път L ?