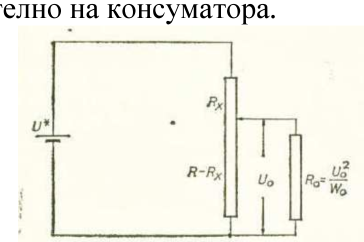
Потенциометрично захранване

Задача. Консуматор на електроенергия с мощност W_0 работи при напрежение U_0, което се подава потенциометрично чрез реостат с общо съпротивление R, свързан с полюсите на източник с постоянно ЕДН $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E} > U_0$). Вътрешното съпротивление на източника се пренебрегва. При каква стойност на R плъзгачът разделя съпротивлението на реостата на две равни части? Намерете отношението на съпротивленията на двете части, на които плъзгачът разделя реостата, както и КПД η на системата в зависимост от R. При каква стойност на R се получава предварително зададена стойност η на КПД? Коя е максималната възможна стойност на КПД при фиксирани $\mathcal{E}$ и U_0 и как може да се реализира?

Решение. Нека означим с $R_0 = \dfrac{U_0^2}{W_0}$ съпротивлението на консуматора, което е фактически известно. От втория закон на Кирхоф, приложен за контура, образуван от източника на ЕДН и реостата (фиг. 1) получаваме връзката[1]:

(1) $$R_x I + U_0 = \mathcal{E},$$

където I е токът през източника, а R_x е съпротивлението на онази част от реостата, която е включена последователно на консуматора.



Фиг. 1.

От първия закон на Кирхоф, приложен за възловата точка, в която се опира плъзгачът, като отчетем и закона на Ом за проводниците със съпротивления $R - R_x$ и R_0, намираме още едно уравнение:

(2) $$I = \frac{U_0}{R - R_x} + \frac{U_0}{R_0}.$$

Като изключим от (1) и (2) тока I, получаваме едно уравнение:

$$U_0 \frac{R_x}{R_0} + U_0 \frac{R_x}{R - R_x} = \mathcal{E} - U_0$$

за неизвестното съпротивление R_x.

Оттук нататък записите се опростяват значително, ако въведем безразмерните величини:

(3) $$\alpha = \frac{\mathcal{E}}{U_0} > 1, \qquad \rho = \frac{R}{R_0} = \frac{RW_0}{U_0^2} \qquad \text{и} \qquad x = \frac{R_x}{R} < 1.$$

В този случай за новата неизвестно x получаваме уравнението:

(4) $$\rho x^2 - (\rho + \alpha)x + \alpha - 1 = 0.$$

Неравенството $\rho > 0$ гарантира, че само единият от корените на това квадратно уравнение удовлетворява условието $x < 1$, така че:

(5) $$x = \frac{1}{2\rho}\left[\alpha - \rho + \sqrt{(\rho - \alpha)^2 + 4\rho}\right].$$

---

[1] На фигурата вместо $\mathcal{E}$ е използвано по-старото означение U^*.

Търсеното отношение е:

$$\xi = \frac{R_x}{R - R_x} = \frac{x}{1 - x}.$$

Като заместим тук x от (5), рационализираме получената дроб и възстановим старите означения за величините, получаваме:

$$\xi = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathcal{E}}{U_0} - \frac{RW_0}{U_0^2} + \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}}{U_0} - \frac{RW_0}{U_0^2}\right)^2 + 4\frac{RW_0}{U_0^2}}\right] - 1. \tag{6}$$

Когато плъзгачът разделя реостата на две равни части, тогава $\xi = 1$ и като заместим тази стойност в (6) и го решим спрямо R, намираме:

$$R = 2\frac{U_0}{W_0}\left(\mathcal{E} - 2U_0\right). \tag{7}$$

Търсеният КПД η на системата е равен на отношението между мощността на консуматора $W_0 = \dfrac{U_0^2}{R_0}$ и изразходваната за единица време енергия от източника $W = I\mathcal{E}$:

$$\eta = \frac{U_0^2}{IR_0\mathcal{E}},$$

откъдето за тока I през източника намираме израза:

$$I = \frac{U_0^2}{\eta R_0 \mathcal{E}}. \tag{8}$$

Чрез него и равенство (1) получаваме връзката:

$$\frac{R_x U_0^2}{\eta R_0 \mathcal{E}} + U_0 = \mathcal{E} \qquad \text{или} \qquad \frac{R_x}{R_0} = \eta\frac{\left(\mathcal{E} - U_0\right)\mathcal{E}}{U_0^2},$$

която чрез въведените с (3) безразмерни величини придобива вида:

$$x\rho = \alpha(\alpha - 1)\eta. \tag{9}$$

Ако по аналогичен начин заместим I от (8) в (2), намираме още една връзка между същите величини, която изразена чрез безразмерните променливи е:

$$\frac{1}{\alpha\eta} = 1 + \frac{1}{\rho(1 - x)}. \tag{10}$$

Като заместим ρx от (9) в (10), получаваме едно уравнение, от което изразяваме ρ чрез α и η:

$$\rho = \eta\alpha^2\left(1 + \frac{\eta}{1 - \alpha\eta}\right). \tag{11}$$

Като възстановим чрез (3) началните означения, намираме:

$$R = \eta\frac{\mathcal{E}^2}{W_0}\left(1 + \frac{\eta}{1 - \eta\dfrac{\mathcal{E}}{U_0}}\right). \tag{12}$$

Тази формула определя какъв реостат трябва да подберем, за да има системата отнапред зададен КПД η.

Ще покажем, че условието $\rho > 0$ може да бъде изпълнено само ако:

(13) $\qquad 1 - \alpha\eta \geq 0$, $\qquad$ което всъщност означава $\quad \eta \leq \dfrac{U_0}{\mathcal{E}}$.

Наистина, нека допуснем, че:

(14) $$1 - \alpha\eta < 0.$$

Тогава от (11) и от условието $\rho > 0$ следва неравенството:

(15) $$1 + \frac{\eta}{1 - \alpha\eta} > 0,$$

което, решено спрямо η, се редуцира на:

(16) $$\eta > \frac{1}{\alpha - 1}.$$

И тъй като по начало $\eta < 1$, (16) може да бъде изпълнено само ако:

(17) $$\alpha > 2.$$

Ако сега решим (5) спрямо квадратния корен, който със сигурност е положителен, намираме:

$$\sqrt{(\rho - \alpha)^2 + 4\rho} = \rho + \alpha - 2\rho x > 0.$$

Като заместим в дясната страна ρ от (11) и ρx от (9), получаваме неравенството:

(18) $$0 < \frac{\alpha}{1 - \alpha\eta}\left[\eta^2\alpha(2\alpha - 1) - 2(\alpha - 1)\eta + 1\right].$$

Тъй като знаменателят е по предположение отрицателен (вж. (14)), то (18) може да бъде изпълнено само ако и числителят е отрицателен. Лесно се проверява обаче, че уравнението:

$$\eta^2\alpha(2\alpha - 1) - 2(\alpha - 1)\eta + 1 = 0$$

няма реални корени, щом е изпълнено неравенство (17). Затова знакът на числителя е същият, както при някоя конкретна стойност на η, например при $\eta = 1$:

$$\alpha(2\alpha - 1) - 2(\alpha - 1) + 1 = (\alpha - 1)^2 + \alpha(\alpha - 1) + 2 > 0.$$

Оттук следва, че неравенство (18) не може да бъде изпълнено, а следователно допускането (14) не е вярно. Тогава задачата има решение само, когато е изпълнено неравенство (13), т.е. при:

(19) $$\eta \le \frac{1}{\alpha} = \frac{U_0}{\mathcal{E}}.$$

Това неравенство определя и търсения максимален КПД:

(20) $$\eta_{\max} = \frac{U_0}{\mathcal{E}}.$$

От (12) се вижда, че при максималния КПД съпротивлението на реостата става безкрайно голяма, т.е. за да достигнем $\eta_{\max}$, трябва да прекъснем проводника на реостата в частта със съпротивление $R - R_x$. В същото време от (5) при $\rho \to \infty$ за съпротивлението R_x получаваме крайна стойност:

(21) $$R' = R_0(\alpha - 1) = \frac{U_0}{W_0}(\mathcal{E} - U_0).$$

Накрая, търсеният израз за КПД се намира, като в (8) заместим x с равното му от (5):

(22) $$\eta = \frac{x\rho}{\alpha(\alpha - 1)} = \frac{1}{2\alpha(\alpha - 1)}\left[\rho + \alpha - \sqrt{(\rho - \alpha)^2 + 4\rho}\right],$$

или:

(23) $$\eta = \frac{U_0^2}{2\mathcal{E}(\mathcal{E} - U_0)}\left[\frac{RW_0}{U_0^2} + \frac{\mathcal{E}}{U_0} - \sqrt{\left(\frac{RW_0}{U_0^2} - \frac{\mathcal{E}}{U_0}\right)^2 + 4\frac{RW_0}{U_0^2}}\right].$$

Оттук също следва, че когато R расте неограничено, η клони към $U_0/\mathcal{E}$.