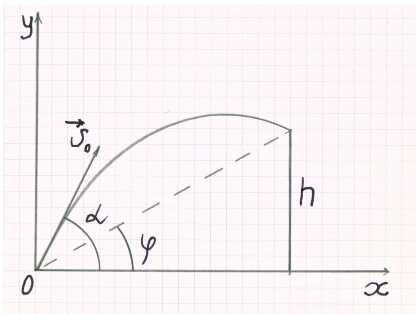
**Енергетично изгодно изпълнение на дузпа**

Обикновено въпросите за движение на тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта, разглеждаме само от кинематична гледна точка. Една възможност за разглеждането им и от енергетичен аспект разкрива следната задача.

**Задача.** Колко е минималната енергия, която футболист трябва да придаде на топката при изпълнение на дузпа, така че тя да влезе във вратата точно под напречната греда на вратата? Масата на топката е $m$ = 0,5 kg, разстоянието от точката за изпълнение на дузпи до гол линията – $L$ = 9 m, а напречната греда е на височина $h$ = 2,50 m над земята. Съпротивлението на въздуха се пренебрегва, а стойността на земното ускорение приемете за $g$ = 10 m/s$^2$.

**Анализ.** Ако приемем, че потенциалната енергия на топката е нула на равнището на терена, в момента на удара пълната механична енергия на топката е равна на кинетичната ѝ енергия $E_K$. Следователно въпросът за намиране на необходимата минимална енергия се свежда до въпроса за необходимата минимална начална скорост $v_0$ на топката.

**Решение.** Ако началото на координатната система е в точката за изпълнение на дузпи, оста $Ox$ – перпендикулярна на равнината на вратата, а оста $Oy$ – вертикално нагоре (фиг. 1),



Фиг. 1.

законът за движение на топката има вида:

(1), (2)
$$x = v_0 t \cos\alpha$$
$$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2},$$

където α е ъгълът между началната скорост $v_0$ и хоризонта.

Тъй като координатите на целта са $L$ и $h$, а траекторията на топката трябва да минава през тази точка, моментът $t_0$, в който топката влита във вратата, се определя от равенствата:

(3) $$L = v_0 t_0 \cos\alpha$$

(4) $$h = v_0 t_0 \sin\alpha - \frac{g t_0^{\,2}}{2}.$$

Като определим $t_0$ от (3) и го заместим в (4), получаваме равенство, свързващо началните скорост и ъгъл с координатите на точката, в която топката влита във вратата:

(5) $$h = L tg\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^{\,2}} \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

По-нататък традиционният път изисква да решим (5) спрямо $v_0$ и да търсим минимум по α. С цел да облекчим записа на равенствата е удобно вместо с $h$ и $L$ да въведем два нови параметъра единият, $x$ – безразмерен, а другият – $u$, с размерност на скорост:

(6) $$x = h/L \qquad \text{и} \qquad u = \sqrt{2gL}.$$

От фигурата се вижда и геометричният смисъл на параметъра $x$ – това е всъщност тангенсът на ъгъла φ, заключен между хоризонта и правата, свързваща точката на изпълнение на дузпите и средата на напречната греда на вратата. Параметърът $u$ пък представлява скоростта, която би придобило тяло, падайки свободно от височина $L$.

В новите променливи равенство (5) придобива вида:

(7) $$x = tg\alpha - \left(\frac{u}{2v_0}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Решено спрямо $(u/2v_0)^2$:

(8) $$\left(\frac{u}{2v_0}\right)^2 = \cos^2\alpha\left(tg\alpha - x\right),$$

това равенство показва, че ако футболистът шутира право към гредата, т.е. при α = φ, дясната страна става нула и за да бъде изпълнено (8) е необходимо началната скорост да бъде безкрайно голяма – очевидно само в този случай при достигане на вратата топката няма да успее да падне по-ниско под гредата.

С помощта на известните тригонометрични равенства:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \quad \text{и} \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

на равенство (8) можем да придадем още вида:

(9) $$\left(\frac{u}{2v_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sin 2\alpha - x\cos 2\alpha - x\right).$$

Формула (9) позволява да се пресметне големината на началната скорост при зададен ъгъл α между нея и хоризонта, така че топката да мине точно под напречната греда.

Чрез диференциране на (9) по α и приравняване производната към нула получаваме, че като функция на α началната скорост има екстремум при:

(10) $$\mathrm{tg}2\alpha = -1/x.$$

За да определим вида на екстремума, вместо да изследваме знака на втората производна, ще съобразим, че щом при α = φ $v_0$ е безкрайност, то при α > φ $v_0$ не може да расте – то може само да намалява и следователно там, където производната е нула, екстремумът на $v_0$ е минимум.

Тъй като по определение $x > 0$, отрицателният знак в дясната страна на (10) показва, че ъгълът 2α лежи във втори квадрант, т.е. самият ъгъл α е в границите между $45^0$ и $90^0$. В такъв случай познаването на tg2α позволява чрез известните тригонометрични формули да определим:

(11) $$\sin 2\alpha = \frac{tg2\alpha}{\sqrt{1+tg^2 2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\cos 2\alpha = \frac{-1}{\sqrt{1+tg^2 2\alpha}} = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

След като заместим тези изрази за sin2α и cos2α в (9), за квадрата на минималната скорост получаваме израза:

(12) $$v_0^{\,2} = \frac{u^2}{2\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)},$$

или, в старите променливи:

(13) $$v_0^{\,2} = \frac{gL^2}{\sqrt{L^2+h^2}-h}.$$

Следователно минималната енергия, която следва да се предаде на топката е:

(14) $$E_k = \frac{mv_0^{\,2}}{2} = \frac{1}{2}.\frac{mgL^2}{\sqrt{L^2+h^2}-h}.$$

Със зададените в условието на задачата стойности на величините от (14) и (13) получаваме:

$$E_К \approx 30\ \text{J}, \qquad v_0 \approx 11\ \text{m/s}.$$

Ако ли пък от формула (10) пресметнем ъгъл α, получаваме $\alpha \approx 53^0$.

**Коментар.** Съществуват поне две съображения, показващи че получената оценка 30 J за енергията е наистина само една долна граница.

**1.** Първото съображение е чисто физично: при решаване на проблема разглеждахме топката като материална точка. Нейните размери обаче не са пренебрежимо малки. Минималната енергия ще бъде около 30 J само ако футболистът успее да нанесе удара така, че в полета си топката да не се върти. Тъй като подобна ситуация е изключение, във всеки реален случай трябва да се отчита и енергията на въртене на топката, т.е. футболистът трябва да предаде на топката повече от 30 J енергия, така че една част от нея да бъде енергия на въртенето и 30 J да останат за постъпателното движение.

**2.** Второто съображение е "тактическо". Получените числа показват, че полетът към вратата трае повече от 1 s, което време е достатъчно за един добър вратар да реагира и хване топката. Затова пък нито един добър нападател няма да си пести енергията, за да изпълни дузпата по този най-икономичен от енергетична гледна точка начин. Лесно може да се провери, че при описаното изпълнение, топката достига равнината на вратата след като е преминала върха на параболата, по която се движи и това, разбира се, удължава пътя й.

Струва си да се прецени доколко ще се променят намерените числени стойности за $E_К$, $v_0$ и α, ако дузпата се изпълни така, че върхът на параболата да попадне върху гредата.

Във върха на параболата вертикалната компонента на скоростта е нула. Този факт позволява от закона за скоростта по посока на оста $Oy$ да определим момента $t_1$, в който топката е най-високо над земята:

$$0 = v_0\sin\alpha - gt_1 \qquad \text{или} \qquad t_1 = v_0\sin\alpha/g.$$

Като заместим израза за $t_1$ в (1) и (2) и отчетем, че в този момент $x = L$ и $y = h$, получаваме две уравнения за неизвестните стойности $v_1$ и $\alpha_1$ на началната скорост и ъгълт, под който трябва да излети топката. Техните решения са:

$$tg\alpha_1 = \frac{2h}{L}; v_1^{\,2} = \frac{gL^2}{2h}\left[1+\left(\frac{2h}{L}\right)^2\right].$$

С числените данни от условието на задачата лесно се пресмята, че в случая началната скорост на топката трябва да е почти 15 m/s, енергията й трябва да бъде почти два пъти по-голяма, отколкото в първия случай, а ъгълът, под който излита спрямо хоризонта – около $29^0$.