Чаша с вода – една класическа задача

В сборниците със задачи и в методическата литература се срещат различни задача, свързана с центъра на масите (ЦМ) на система от няколко тела, за чието решаване е достатъчно прилагането едно единствено *правило*[1]:

Центърът на масите на система от две тела се намира:

– **върху отсечката, свързваща техните центрове на масите,**

– **по-близо до тялото с по-голяма маса.**

Първото от съдържащите се в това правило две твърдения е интуитивно ясно.

Пример за ефективността на това правило е следната задача.

Задача. Цилиндрична чаша с вода лежи на хоризонтална равнина. При какво положение на свободната повърхност (нивото) на водата ЦМ на системата чаша–вода е най-ниско?

Анализ. Симетрията относно оста на цилиндъра подсказва, че задачата е едномерна – достатъчно е говорим за *височини* над равнината, върху която лежи чашата: за височината на нивото на водата, за височината на ЦМ, за височината на чашата и т.н.

Условието не съдържа сведения нито за материала, от който е направена чашата (напр. – за плътността му), нито за нейните геометрични размери. И тъй като една коректно формулирана задача трябва да предоставя достатъчно информация за решаването й, следва, че отговорът не зависи нито от височината на чашата, нито от дебелината на стените и на дъното й, нито от това, дали е стъклена, метална и др.п.

При това положение остават само две величини, които може да фигурират в отговора: височината на ЦМ на системата чаша–вода, и височината на нивото на водата в чашата. Това заключение подсказва донякъде какъв би могъл да бъде отговорът. Наистина, би било странно, ако от решението следва, че ЦМ на системата е най-ниско, когато нивото на водата е на половина от височината на ЦМ (или 2 пъти, или 5 пъти по високо от него). В отговора множители като 0,5, 2, 5 и пр. може да се появят, ако той зависи например от отношението между плътностите на водата и на материала на чашата, или от отношението между височината на чашата и дебелината на дъното й и др.п. Както отбелязахме по-горе, условието изключва подобни зависимости.

Така стигаме до **предположението**, че може би ЦМ на системата е най-ниско, когато положението му **съвпада** с нивото на водата. Това предположение, разбира се, не е обосновано, а дали е вярно, може да потвърди или отхвърли само решението на задачата.

Решение. Да проследим мислено процеса на пълнене чашата с вода. Да означим с h_0 височината на ЦМ на **празната** чаша и налеем в нея достатъчно тънък слой вода, така че неговият ЦМ се намира **под** ЦМ на празната чаша. Вече разполагаме със система от две тела – празна чаша и слой вода. Според цитираното в началото *правило*, общият ЦМ на тази система се намира върху отсечката, свързваща двата ЦМ – на празната чаша, и на водния слой. И тъй като ЦМ на водата е по-ниско от h_0, то височината h_1 на общия ЦМ ще удовлетворява неравенството $h_1 < h_0$.

Ако нивото на водата е под h_1, можем да повторим процедурата – добавяме втори слой вода, толкова дебел, че неговият ЦМ да бъде по-ниско от h_1. Разглеждаме нова система от две тела: чашата с първия воден слой, чиито ЦМ е на височина h_1, и добавения втори воден слой. Както и в предишния случай, прилагайки *правилото* заключаваме, че височината h_2 на ЦМ на новата система удовлетворява неравенството $h_2 < h_1$.

Ако и след второто доливане нивото на водата е все още под ЦМ на системата, продължаваме процеса – доливаме трети слой вода и т.н.

[1] За обосновка на това правило вж. файла I chast\2 zadachi-eseta\42 chasha s pyasak.

Така, след всяко добавяне на вода нейното ниво се покачва, а височината на ЦМ на общата система слиза надолу. Очевидно е, че продължавайки този процес, ще достигнем положение, при което ЦМ на системата чаша с вода се оказва върху свободната повърхност на водата. Да означим с H височината на това равнище.

Нека след това продължим процеса и добавим нов слой вода. Неговият ЦМ вече е по-високо от H и според все същото *правило*, общият център на масите вече също ще е по-високо от H. Ако доливаме още вода, общият ЦМ ще се изкачва все по-високо.

Следователно предположението, което направихме при анализа на задачата, се оказа правилно: **центърът на масите на чаша с вода е най-ниско, когато лежи върху свободната повърхност на водата.**

Коментар.

– Интересно е, че за решаване задачата се оказа достатъчна само *първата* част на *правилото* – никъде не използвахме, че общият ЦМ е по-близо до по-масивното тяло.

– Срещат се различни варианти на разгледаната задача. Тъй като височината на ЦМ на едно лежащо върху хоризонтална плоскост тяло е свързана с неговата стабилност, понякога се говори не за вода, а за мокър пясък. С други думи, търси се при какво ниво на мокрия пясък, насипан в цилиндрична чаша, системата е най-стабилна. Очевидно е, че при такава постановка вече водата не е подходяща, защото при наклоняване на чашата свободната водна повърхност остава хоризонтална и това нарушава цилиндричната симетрия.