Период на дълго махало

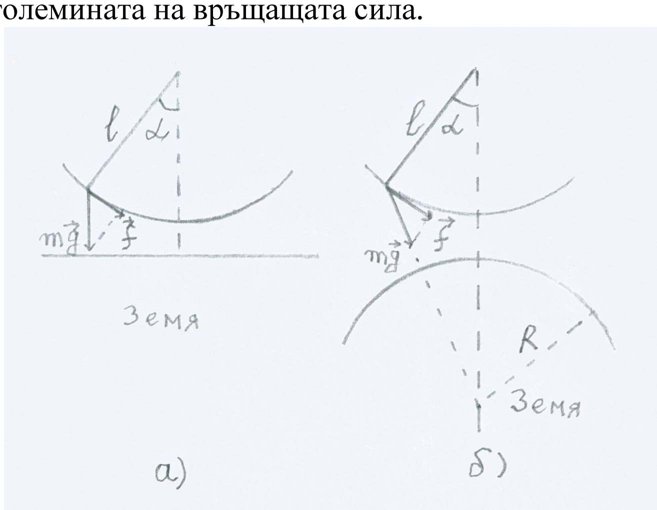
Формулата $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ за период на математично махало е изведена при две предположения: че земното гравитационно поле е хомогенно и, че амплитудата на люлеене е малка. От първото следва, че в точките, през които преминава махалото, земното ускорение има една и съща **големина** и една и съща **посока**. Второто гарантира, че връщащата сила може да се смята пропорционална на ъгъла на отклонение, а не на синуса му (както е в действителност).

Първото условие е изпълнено, когато дължината l на махалото е пренебрежимо малка спрямо земния радиус R. Ако условието $l << R$ не е изпълнено, формулата за периода би трябвало да се коригира. За да определим в каква посока са корекциите, ще разгледаме следната качествена задача, като запазваме ограничението амплитудата на люлеене да бъде малка.

Задача. Дължината l на математично махало е от порядъка на радиуса R на Земята. По-голям или по-малък е периодът на люлеенията на махалото от пресметнатия по формула $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, при условие, че малката амплитуда гарантира една и съща големина на земното ускорение g във всички точки от траекторията.

Бележка. За да не изглежда задачата нямаща нищо общо с действителността (практически е невъзможно да се направи толкова дълга подставка за подобно махало и да се намери толкова дълга нишка, на която то да се окачи), ще припомним, че движението му е същото като на количка, движеща се без триене по релси с форма на дъга от вертикална окръжност с радиус l.

Решение. Периодът на математичното махало е по-кратък, когато връщащата сила е по-голяма – в приведената по-горе формула земното ускорение g е в знаменател. Задачата е качествена, но за достигане до решението трябва да се използва чертеж, позволяващ анализ на големината на връщащата сила.



Фиг. 1.

На фиг. 1,а е показана връщащата сила $\vec{f}$ в случая на "плоска" Земя, т.е., когато земният радиус е безкрайно голям в сравнение с дължината на махалото. На фиг. 1,б, при същия ъгъл на отклонение, е изобразена ситуацията в случая, когато величините l и R са сравними. Вижда се, че във втория случай връщащата сила е по-голяма. Следователно периодът на "дългото" махало ще бъде по-къс, отколкото ако се пресметне по формулата $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Количествена задача. Покажете, че за случая $l = R$ и, когато най-ниската точка от траекторията е върху земната повърхност (т.е. – не като на фиг. 1), точният израз за периода на махалото е $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$.

Малък проблем. Съществува проблем с коректността на задачата. Не е отнапред ясно дали е допустимо да смятаме, че при малки отклонения на дългото махало можем да смятаме $g = \text{const}$, а посоката на $\vec{g}$ - зависеща от отклонението. Задачата би била коректна, ако се окаже, че допълнителната връщаща сила (разликата между връщащите сили на дълго и късо махало) е пропорционална на отношението $\frac{l}{R}$, а промяната на големината на земното ускорение – на квадрата $\left(\frac{l}{R}\right)^2$ на това отношение.

Проверете верността на изказаното твърдение. (Ще трябва да си припомните, че на разстояние r от центъра на Земята големината на земното ускорение е $g = G\frac{M}{r^2}$, където G е гравитационната константа, а M – масата на Земята.)