Търкалящи се сфери[1]

Условията на няколко често срещани по сборниците качествени задачи изглеждат примерно по следния начин:

1. Дървена и желязна сфери с еднакви диаметри започват едновременно да се търкалят без хлъзгане от една и съща височина по наклонена равнина. Коя сфера първа стига долния ръб на равнината?

2. Дървена и желязна сфери с еднакви маси започват едновременно да се търкалят без хлъзгане от една и съща височина по наклонена равнина. Коя сфера първа стига долния ръб на равнината?

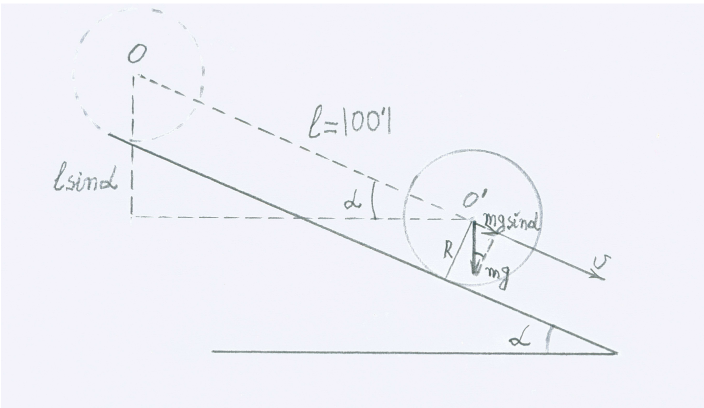
3. Две железни сфери с различни маси започват едновременно да се търкалят без хлъзгане от една и съща височина по наклонена равнина. Коя сфера първа стига долния ръб на равнината?

4. Желязна сфера с по-голям диаметър и дървена сфера с по-малък диаметър започват едновременно да се търкалят без хлъзгане от една и съща височина по наклонена равнина. Коя сфера първа стига долния ръб на равнината?

(По-прецизните автори добавят, че съпротивлението на въздуха и триенето при търкаляне се пренебрегват.)

Очевидно е, че чрез избор между “дърво – желязо”, “еднакви – различни” радиуси и “по-голям – по-малък” радиус и пр. са възможни и други комбинации.

Отговорът е забележително прост и един и същ за всички случаи: независимо от масата и диаметъра, *щом търкалянето е без хлъзгане, във всеки момент скоростите на центровете на сферите са еднакви, така че те едновременно стигат долния ръб на равнината.*



фиг. 1.

Доказателството на това твърдение използва само закона за запазване на енергията. Наистина, да разгледаме случая на една сфера с радиус R и маса m (фиг. 1). Ако отчитаме гравитационната потенциална енергия от равнището на т. O, на което се намира центърът на сферата в началото, нейната пълна механична енергия е нула. Когато този център измине път l и стигне т. O', той придобива скорост v, а височината му намалява с $l\sin\alpha$. В този момент сферата има потенциална енергия $-mgl\sin\alpha$ (g – земното ускорение) и кинетична енергия на транслационното движение $\frac{1}{2}mv^2$. Освен това обаче сферата има и ротационна кинетична енергия $\frac{1}{2}I\omega^2$, където I е инерчният й момент, а ω – нейната ъглова скорост.

[1] Всъщност, би следвало да говорим за търкалящи се **кълба**. Не, че кухата сфера не може да се търкаля, но както ще стане ясно от текста, имат се предвид именно плътни, еднородни кълба. За съжаление обаче, във всекидневието наистина сме свикнали да смесваме тялото *кълбо* с повърхността му – *сферата*.

При това положение законът за запазване на механичната енергия гарантира изпълнение на равенството:

(1) $$0=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2-mgl\sin\alpha\,.$$

Тъй като инерчният момент на кълбо с радиус R и маса m е $I=\frac{2}{5}mR^2$, като използваме връзката между линейна и ъглова скорост ($v = R\omega$) и заместим тези изрази в (1), от полученото уравнение за скоростта v намираме:

(2) $$v=\sqrt{\frac{10}{7}gl\sin\alpha}\,.$$

Формула (2) показва, че наистина скоростта на центъра на сферата не зависи нито от масата, нито от радиуса й.

Сравнението на (2) с връзката между скорост v, път l и ускорение a при равноускорително движение:

(3) $$v=\sqrt{2al}$$

показва еднаквата структурите на двете формули. Следователно центърът на търкалящата се сфера се движени с постоянно ускорение:

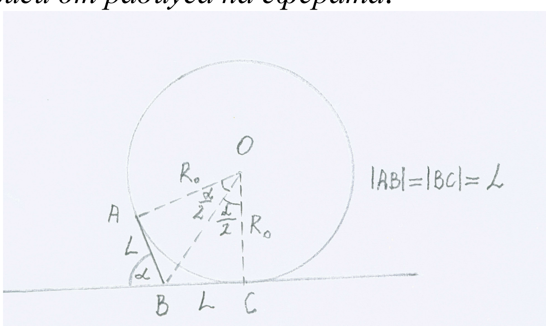
(4) $$a=\frac{5}{7}g\sin\alpha\,.$$

(Забележете, че $\frac{5}{7}<1$ и следователно скоростта на центъра е по-малка от скоростта $\sqrt{2gl\sin\alpha}$, която би придобило тяло, хлъзгащо се без триене по наклонената равнина, след като измине по вертикалата път $l\sin\alpha$. Това е естествено, защото част от потенциалната енергия на търкалящата се сферата се е преобразувала в ротационна енергия.)

И така, дотук поуката е:

При търкаляне на сфера по наклонена равнина ускорението на центъра на сферата е постоянно и зависи само от наклона на равнината (формула (4)), а скоростта му в даден момент, освен от наклона, се определя само от изминатия път (формула (2)).

Фактът, че ускорението и скоростта не зависят от масата, е разбираем – той е в съгласие с откритието на Галилей, че при свободно падане леките и тежките тела падат еднакво. Независимостта от радиуса обаче, би трябвало да събуди подозрение, защото все пак става дума за движение на тяло, а не на материална точка (щом роля играе инерчният момент!). Кога би могло да се прояви зависимост от радиуса R на сферата? Очевидно е, че наклонът на равнината е независим от R, но има ситуации, в които *самият изминат път l зависи от радиуса на сферата*.



Фиг. 2.

Един екстремен в това отношение случай е показан на фиг. 2: за сферата с *критичен* радиус $R_0 = L\cot g\dfrac{\alpha}{2}$, където L е дължината на наклонената равнина, изминатият път е точно нула, защото тази сфера в началния момент се допира и до наклонената, и до хоризонталната равнина (разгледайте правоъгълния триъгълник OAB). Тази сфера изобщо няма да започне да се търкаля! Затова по-нататък ще разглеждаме само случаи на сфери, чиито радиуси удовлетворяват неравенството $R \le R_0 = L\cot g\dfrac{\alpha}{2}$.

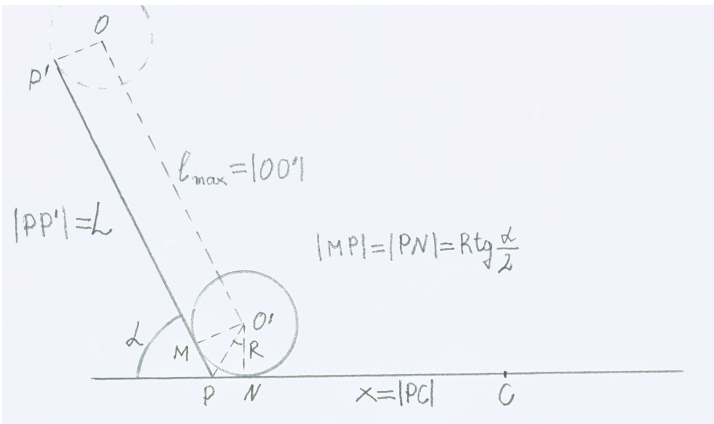
Колкото по-малък от R_0 е радиусът на една сфера, толкова по-дълъг път ще измине тя по наклонената равнина и толкова по-голяма ще бъде скоростта й в момента на досег с хоризонталната равнина. (Думите "колкото – толкова" в случая не означават права пропорционалност. Формула (2) показва, че скоростта е пропорционална на квадратен корен от пътя.)

Направеното *качествено* разглеждане позволява да поставим следната *количествена* задача.

Задача. Сфера с радиус R започва да се търкаля без хлъзгане по наклонена равнина с дължина L, която сключва с хоризонтална равнина ъгъл α. Каква максимална скорост v ще придобие центърът т. O на сферата и в кой момент t тя ще докосне хоризонталната равнина?

Решение. Скоростта на центъра на сферата е максимална в момента на докосване на хоризонталната равнина. Израз за тази скорост получаваме от формула (2), в която трябва да заместим l с разстоянието $l_{\max}$ между началното и крайното положение на т. O (фиг. 3). От фигурата се вижда, че:

(5) $$l_{\max} = L - R\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$



Фиг. 3.

Следователно, съгласно с формула (2), търсената скорост е:

(6) $$v = \sqrt{\frac{10}{7}g\left(L - R\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha}.$$

Вижда се, че:

– тази формула е обобщение на формула (2) за случая $R \neq 0$;

– v наистина е намаляваща функция на R;

– когато радиусът на сферата е равен на критичния радиус R_0, придобитата скорост е нула.

Момента t на допир до хоризонталната равнина намираме, като използваме познати зависимости при равноускорителни движения ($s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{t}{2}(at) = \frac{1}{2}vt$). От тях следва:

(7) $$t = \frac{2l_{\max}}{v} = 2\frac{L - R\text{tg}\alpha/2}{\sqrt{\frac{10}{7}g\sin\alpha(L - R\text{tg}\alpha/2)}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{10}{7}g\sin\alpha}}\sqrt{L - R\text{tg}\alpha/2}\,.$$

Формули (6) и (7) потвърждават интуитивно ясното твърдение, че колкото е по-голям радиусът на сферата, толкова по-скоро тя стига хоризонталната равнина, но придобитата от нея скорост е по-малка.

С този извод по същество физиката приключва. Оттук надолу следва елементарна математика и то – с не много ясно заключение.

От направените разглеждания следва, че ако пуснем по наклонената равнина едновременно две сфери с различни радиуси, по-голямата първа ще започне да се търкаля по хоризонталната равнина, но скоростта й ще бъде по-малка, отколкото съответната скорост на по-малката сфера. А това от своя страна означава, че в определен момент малката непременно ще настигне голямата и това *качествено* заключение дава възможност да формулираме още една *количествена* задача.

Задача. Две сфери с радиуси R_1 и R_2 започват едновременно да се търкалят без хлъзгане по наклонена равнина с дължина L, сключваща с хоризонтална равнина ъгъл α. Намерете на какво разстояние от пресечницата на двете равнини малката сфера ще стигне голямата.

Решение. Първо ще разгледаме два частни случая, в които решението се намира без пресмятания.

1. При **равни** радиуси, т.е. при $R_1 = R_2$, сферите се движат едновременно, по един и същ начин и по наклона, и по хоризонталната равнина. От фиг. 3 се вижда, че те докосват хоризонталната равнина в точка, която отстои от пресечницата на двете равнини на разстояние:

(8) $$x_0 = R\text{tg}\alpha/2.$$

От нея нататък, през всяка точка, за която $x > x_0$, двете сфери преминават едновременно. С други думи, при равни радиуси на сферите няма никакво настигане и решението на задачата е $x > x_0 = R\text{tg}\alpha/2$, т.е. по същество задачата им безброй много решения.

2. Нека радиусите са различни, но по-големият от тях – примерно R_2, е равен на *критичния радиус* $R_0 = L\cot g\frac{\alpha}{2}$. В този случай голямата сфера въобще не се търкаля и малката сфера "настига" голямата там, където последната допира хоризонталната равнина. И от фиг. 2 се вижда, и чрез заместване на израза за R_0 в (8) се получава, че в този частен случай търсеното разстояние до пресечницата на двете равнини е $x = L$.

Да разгледаме сега и **общия** случай – нека радиусите на сферите са **различни**, и за определеност приемем, че $R_1 < R_2$. За опростяване на писането въвеждаме следните означения:

(9) $$v_0 = \sqrt{\frac{10}{7}gL\sin\alpha} \quad \text{и} \quad \tau = 2\sqrt{\frac{7L}{10g\sin\alpha}}\,.$$

Очевидно v_0 е скоростта, с която сфера с безкрайно малък спрямо L радиус стига края на наклонената равнина, а τ – времето на ускорителното й движение. От (9) се вижда, че двете константи удовлетворяват връзката между път, скорост и време при равноускорително движение без начална скорост, т.е.:

(10) $$L = \frac{1}{2} v_0 \tau \ .$$

С новите означения изразите за скоростите, с които сферите стигат хоризонталната равнина, съгласно с формули (6) и (9), придобиват вид:

$$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{L - R_1 \mathrm{tg}\alpha / 2}{L}} \qquad \text{и} \qquad v_2 = v_0 \sqrt{\frac{L - R_2 \mathrm{tg}\alpha / 2}{L}} \ .$$

Формула (5) показва, че числителите в подкоренните величини имат ясен геометричен смисъл – това са разстоянията, изминати от сферите до моментите, в които докосват хоризонталната равнина. За по-нататъшно опростяване на записите е удобно да ги означим с една буква, съответно:

(11) $$l_1 = L - R_1 \mathrm{tg}\alpha/2 \qquad \text{и} \qquad l_2 = L - R_2 \mathrm{tg}\alpha/2.$$

С тези означения максималните скорости на двете сфери придобиват вид:

(12) $$v_1 = v_0 \sqrt{\frac{l_1}{L}} \qquad \text{и} \qquad v_2 = v_0 \sqrt{\frac{l_2}{L}} \ .$$

Аналогично, от (7) и (9) следва, че времената, за които сферите стигат хоризонталната равнина са съответно:

(13) $$t_1 = \tau \sqrt{1 - \frac{R_1}{L} tg \frac{\alpha}{2}} = \tau \sqrt{\frac{l_1}{L}} \qquad \text{и} \qquad t_2 = \tau \sqrt{1 - \frac{R_2}{L} tg \frac{\alpha}{2}} = \tau \sqrt{\frac{l_2}{L}} \ .$$

Да означим с x разстоянието от пресечницата на двете равнини до точката, в която малката сфера настига голямата. От фиг. 3 се вижда, че пътят на всяка сфера по хоризонталната равнина също зависи от нейния радиус, като за малката той е $x - R_1\mathrm{tg}\alpha/2$, а за голямата – $x - R_2\mathrm{tg}\alpha/2$. Времената $t_1^{'}$ и $t_2^{'}$, за които сферите изминават тези пътища със скоростите, описвани с изразите (12) са съответно:

(14) $$t_1^{'} = \frac{x - R_1 \mathrm{tg}\alpha / 2}{v_1} \qquad \text{и} \qquad t_2^{'} = \frac{x - R_2 \mathrm{tg}\alpha / 2}{v_2} \ .$$

По условие в точката, отстояща на разстояние x от пресечницата на равнините, сферите пристигат едновременно, от където следва равенството:

$$t_1 + t_1^{'} = t_2 + t_2^{'} \ .$$

Като заместим тук съответните величини с изразите от формули (12), (13) и (14), за неизвестното разстояние x получаваме уравнението:

(15) $$\tau \sqrt{\frac{l_1}{L}} + \frac{x - R_1 \mathrm{tg}\alpha / 2}{v_0 \sqrt{\frac{l_1}{L}}} = \tau \sqrt{\frac{l_2}{L}} + \frac{x - R_2 \mathrm{tg}\alpha / 2}{v_0 \sqrt{\frac{l_2}{L}}} \ .$$

След решаване на уравнението и възстановяване на началните означения, окончателният израз за x има вида:

(16) $$x = L + 3\sqrt{\left(L - R_1 \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \right)\left(L - R_2 \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \right)} \ .$$

Като коментар към този резултат ще отбележим само, че той в някаква степен противоречи на интуицията: разликата между пътищата, изминати от двете сфери до допира им с хоризонталната равнина, както и разликата в достигнатите скорости изглеждат малки. И въпреки това, по-малката сфера настига по-голямата на разстояние от пресечницата на равнините, по-голямо от дължината на наклонената равнина!

Едно очевидно следствие от (16) е, че ако радиусите на сферите са много по-малки от дължината на наклонената равнина (т.е. при $\frac{R_1}{L} << 1$ и $\frac{R_2}{L} << 1$), така че малките от първи порядък спрямо единицата величини могат да се пренебрегнат, то:

(17) $$x = 4L,$$

т.е. в нулево приближение положението на точката на настигане не зависи нито от наклона, нито от радиусите на сферите.

Нека сега приложим общото решение за разгледаните по-горе частни случаи.

А) От формула (16) за случая на сфери с равни радиуси получаваме:

(18) $$x = L + 3\left(L - R\text{tg}\alpha/2\right).$$

Ние вече знаем, че при равни радиуси задачата има безброй много решения – всяка точка от хоризонталната равнина, за която $x > R\text{tg}\alpha/2$, удовлетворява условието. Точката, чието разстояние до пресечницата на равнините се изразява с (18), лежи в интервала ($R\text{tg}\alpha/2$, ∞), но все пак тя е единствена точка, т.е. в този частен случай общото решение не дава всички възможни решения.

Б) Да приложим общата формула за случая, в който радиусът на по-голямата сфера е равен на критичния радиус $R_0 = L\cot g\dfrac{\alpha}{2}$. От (16) получаваме x = L, което е точно резултатът, получен по-горе.

Коя е причината, заради която общото решение (16) не дава всички решения за случая на равни радиуси? От изложеното решение тази причина не личи, защото в него са пропуснати преобразованията, които водят от (15) към (16). А те включват **една важна операция**: съкращаване на $R_2 - R_1$. Този израз обаче е нула в случай А), поради което тази операция не е позволена!

Поуката: **Ако при решаване на една задача съкратите израз, който може да стане нула, полученото общо решение може да крие изненади: в нашата задача то не дава всички решения за частния случай на еднакви сфери.**

А защо разглеждахме случай Б) – при него няма никаква изненада: общото решение води до същия резултат, който получихме и директно. Отговорът е: за да поставим ударение върху думата **може** от поуката, т.е. да покажем случай, в който извършването на непозволено действие не води до изненади. Наистина, преобразованията, които водят от (15) към (16), включват и умножение с $\sqrt{l_2}$, а в частния случай Б) тази величина е нула! И умножението с $\sqrt{l_2}$ не е довело до нищо особено...

Аз не знам критерий, който показва кога може и кога не може да се дели или умножава на нула. Няма да се учудя, ако се окаже, че математиците знаят нещо по въпроса. Принципът обаче е ясен – не може!