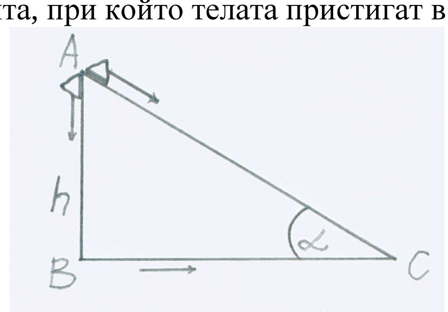
Движение по наклонена равнина – от качество към количество

В заглавието, разбира се, има определена игра на думи, която може да схванат хора, провели част от съзнателния си живот по времето, когато изучаването на законите на диалектиката имаше голямо значение. Един от тези закони гласи, че количествените натрупвания водят до качествени изменени. Неведнъж сме предлагали примери на физични задачи, в които разглежданията следват обратния път: първо на качествено равнище се правят определени заключения, след което чрез количествени разглеждания се стига до отговора на някои допълнителни въпроси. По-долу е поредният пример за подобна задача.

Задача. Две еднакви тела започват движение едновременно. Първото се хлъзга без триене по наклонената равнина *AC* (фиг. 1), а второто първо пада свободно до т. *B*, след която (претърпявайки подходящо отражение) продължава с придобитата скорост по хоризонталната права *BC* (също без триене). Покажете, че съществува такъв ъгъл α между равнината и хоризонта, при който телата пристигат в т. *C* едновременно.

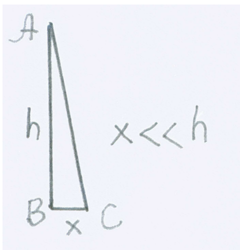


Фиг. 1.

Качествено решение

Задачата има едно очевидно решение – α = 90°, т.е., когато наклонената равнина е вертикална. Като тривиален, този случай не е интересен – и пътищата, и ускоренията на телата са равни, така че естествено и времената за движението им са еднакви.

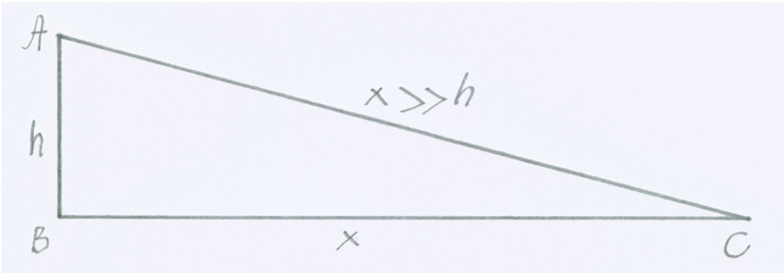
По-нататък следваме метода на екстремните стойности – разглеждаме случаите, когато α → 90°, и когато α → 0°. Удобно е обаче да разглеждаме зависимостта на времената на движение не от ъгъла α, а от разстоянието $x = |BC|$ (фиг. 2). В първия екстремен случай, при $x \to 0$ (т.е. α → 90°) пътищата $|AB|$ и $|AC|$ са почти равни, почти равни са и ускорението на телата по тях. И тъй като второто тяло има да измине допълнително и хоризонталното разстояние *x*, то ще закъснее спрямо първото тяло, което се хлъзга по наклонената равнина.



Фиг. 2.

(*Забележка*: Един привикнал да разсъждава по-строго ум би могъл да възрази: "Почти равни, почти равни...", но все пак и $|AC|$ е по-дълго от $|AB|$, и ускорението по наклона е по-малко от ускорението по вертикалата. Дали тези два факта не компенсират удължението на времето по начупената линия *ABC*? За да се убедим, че изводът наистина е правилен, трябва да отчетем, че при $\varepsilon << 1$ е изпълнено приблизителното равенство $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1+\dfrac{\varepsilon}{2}$. С помощта на тази формула и свойствата на подобни триъгълници се уверяваме, че при $x << h$ дължината на начупената линия ABC се различава от дължината на AB с малка величина от първи порядък, т.е. $h + x = h(1 + \frac{x}{h})$. В същия случай намалението на ускорението по AC спрямо ускорението g на свободното падане, и удължението на AC спрямо AB са величини от порядъка на $\left(\frac{x}{h}\right)^2$ и следователно дължащото се на тях увеличение на времето на движение на първото тяло наистина може да се пренебрегне спрямо увеличението на времето за движение на второто тяло.)

Във втория екстремен случай $x \to \infty$, т.е. ъгълът на наклона е много малък (фиг. 3). В този случай отново пътищата на двете тела са почти еднакво дълги. Второто тяло обаче, по време на свободното падане, набира скорост $v = \sqrt{2gh}$ и с нея изминава остатъка от пътя BC, докато първото тяло достига тази скорост едва в края на пътя си. Следователно, в този екстремен случай в т. C първо пристига тялото, движещо се по начупената линия ABC.



Фиг. 3.

От това, че при стръмен наклон първо пристига тялото, хлъзгащо се по равнината, а при малък наклон – тялото, движещо се по начупената линия, следва, че в интервала 0° < α < 90° съществува (поне един – би казал математикът) такъв ъгъл на наклона, при който телата пристигат в т. C едновременно.

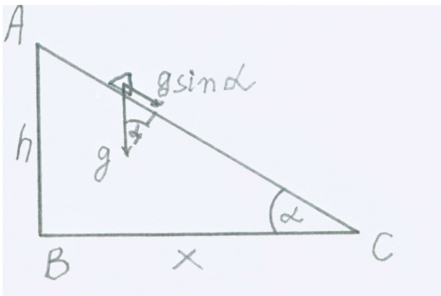
Което и трябваше да се докаже.

Количествено решение

Количественото решение изисква при произволно x (произволен ъгъл α) да изразим времената за движение на двете тела и да ги приравним – решението на полученото уравнение ще покаже при какъв ъгъл тези времена са равни.

Пътят на първото тяло е $|AC| = \sqrt{h^2 + x^2}$ (фиг. 4), а ускорението му – $a' = g\sin\alpha = g\frac{h}{\sqrt{h^2 + x^2}}$. Времето t_{AC} за движението намираме от закона за пътя $|AC| = \frac{1}{2}a' t_{AC}^2$:

(1) $$t_{AC} = \sqrt{\frac{2}{gh}\left(h^2 + x^2\right)}.$$



Фиг. 4.

Времето за свободно падане на второто тяло е:

(2) $$t_{AB} = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

За това време тялото придобива скорост $\sqrt{2gh}$ и с нея изминава пътя x за време:

(3) $$t_{BC} = \frac{x}{\sqrt{2gh}}\,.$$

Следователно общото време за движение на второто тяло е:

(4) $$t_{ABC} = t_{AB} + t_{BC} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{x}{\sqrt{2gh}}\,.$$

От приравняване на десните страни на (1) и (4) получаваме уравнението:

(5) $$\sqrt{\frac{2}{gh}\left(h^2 + x^2\right)} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{x}{\sqrt{2gh}}\,.$$

Това уравнение има две решения. Едното, $x = 0$, представлява разгледаното в началото тривиално решение (случая на вертикална, а не на наклонена равнина). Решението при $x \neq 0$ е:

(6) $$x = \frac{4}{3}h\,.$$

От фиг. 4 за тангенса на търсения ъгъл намираме:

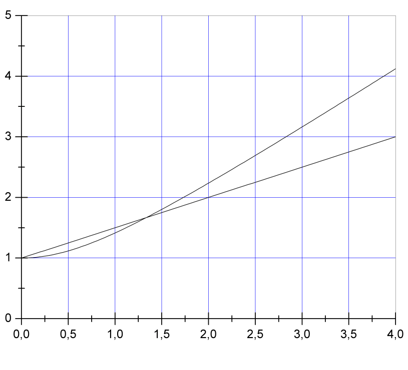
(7) $$tg\alpha = \frac{h}{x} = \frac{3}{4} = 0{,}75\,.$$

Следователно двете тела пристигат едновременно в т. C, когато ъгълът на наклона е $\alpha = \mathrm{arctg}\ 0{,}75 \approx 36{,}9°$.

Ако въведем означения $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ за времето на свободно падане от т. A до т. B и $\xi = \frac{x}{h}$ – за безразмерното отношение на пътищата BC и AB, на формули (1) и (5) може да се придаде вид:

$$f_1(\xi) = \frac{t_{AC}}{\tau} = \sqrt{1+\xi^2} \qquad \text{и} \qquad f_2(\xi) = \frac{t_{ABC}}{\tau} = 1 + \frac{\xi}{2}\,.$$

Графиките на тези функции са показани на фиг. 5, като по абсцисата са нанесени стойностите на ξ, а по ординатата – съответно стойностите на времената на движение на двете тела, изразени в единици τ.



Фиг. 5.

От фигурата се вижда, че започвайки от една и съща точка (при $x = 0$), двете графики наистина се пресичат някъде при $\xi = 1{,}33... = 4/3$. Както следва от формулите за f_1 и f_2, при $\xi = 4/3$ времето за движение на телата е $\frac{5}{3}\tau$, което се вижда и от графиките.