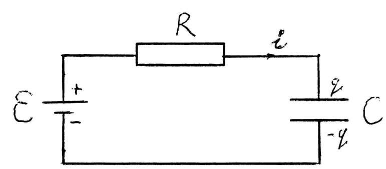
Зареждане на кондензатор от батерия

Да разгледаме процеса на зареждане на кондензатор с капацитет C през резистор със съпротивление R от източник с постоянно ЕДН $\mathcal{E}$ (фиг. 1). Интересува ни съотношението между извършената от ЕДС на източника работа и натрупаната в кондензатора енергия. (Очевидно е, че двете величини ще се различават, защото част от въпросната работа увеличава вътрешната енергия на резистора – в него се отделя джаулева топлина.) За съжаление, пресмятането не е елементарно, тъй като процесът на зареждането не е стационарен.



Фиг. 1.

Ако означим с $i(t)$ и $q(t)$ моментните стойности на тока и заряда на кондензатора, тъй като токът представлява количеството заряд, постъпил върху електродите на кондензатора за единица време, очевидно връзката между тези величини е:

(1) $$\frac{dq}{dt} = i\,.$$

От друга страна сборът от напрежението Ri върху резистора и напрежението $\frac{q}{C}$ на кондензатора трябва да е равно на ЕДН на източника, т.е.:

(2) $$\frac{q}{C} + iR = \mathcal{E}\,.$$

Като диференцираме (2) по времето и отчетем (1) и факта, че $\mathcal{E}$ е константа, за тока получаваме обикновено диференциално уравнение, чиито променливи се отделят:

$$\frac{di}{i} = -\frac{dt}{RC}\,.$$

Неговото общо решение е $i(t) = ae^{-\frac{t}{RC}}$, като константата a се определя от началното условие $i(0) = \frac{\mathcal{E}}{R}$, което следва от (2), тъй като при $t = 0$ зарядът на кондензатора е $q(0) = 0$. Така окончателно за зависимостта на тока от напрежението получаваме:

(3) $$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}\,.$$

Познаването на тази зависимост позволява да пресметнем количеството топлина W, отделена в резистора. Тъй като по закона на Джаул–Ленц отделеното за единица време количество е Ri^2, а кондензаторът се зарежда безкрайно дълго време, търсеното количество се дава с интеграла:

(4) $$W = \int_0^\infty Ri^2(t)dt = \frac{\mathcal{E}^2}{R}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{RC}}dt = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2\,.$$

От друга страна обаче $\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$ е и енергията на кондензатора след пълното му зареждане. Оттук следва и важният извод:

При зареждане на кондензатор от източник на постоянно напрежение през резистор, енергията на кондензатора е равна на отделената в резистора джаулева топлина.

Изненадващото в този извод е независимостта на топлинните загуби от съпротивлението на резистора. Той обаче позволява да се реши следната задача.

Задача. Кондензатор се зарежда през резистор от батерия, съдържаща n еднакви, последователно свързани елемента, всеки от които има постоянно ЕДН. В кой случай топлинните загуби са по-малки:

а) когато заредим кондензатора наведнъж от батерията, или

б) когато съединим електродите на кондензатора първо с полюсите на първия елемент от батерията, след това – с полюсите на първите два, с първите три и т.н. – докато накрая ги присъединим към полюсите на цялата батерия?

Анализ. Загубите в джаулева топлина са пропорционални на квадрата от протичащия през резистора ток. Тъй като при първия случай в началния момент протича ток, който е n пъти по-голям от токовете в началните моменти при присъединяването на поредния елемент о батерията, може да се очаква, че топлинните загуби във втория случай са по-малки. Дали това е наистина така обаче, може да каже само след количествено решение на задачата.

Решение. Да означим с $\mathcal{E}$ ЕДН на един елемент от батерията и с C – капацитета на кондензатора. В първия случай, при директно зареждане на кондензатора от цялата батерия, натрупаният заряд е $Q = C(n\mathcal{E})$, а запасената енергия – съответно:

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{n^2}{2}C\mathcal{E}^2 . \tag{1}$$

Съгласно с доказаното по-горе твърдение, точно толкова са и топлинните загуби W^1 в резистора за първия случай, т.е.:

$$W^1 = \frac{n^2}{2}C\mathcal{E}^2 . \tag{2}$$

Нека във втория случай вече сме подали на кондензатора напрежение от k на брой последователно свързани елемента на батерията – напрежението на кондензатора е $(k\mathcal{E})$. Когато присъединим към електродите на кондензатора и $(k + 1)$-ия елемент от батерията, върху кондензатора преминава допълнителен заряд:

$$q = C\left[(k+1)\mathcal{E} - k\mathcal{E}\right] = C\mathcal{E} .$$

Тъй като ЕДН на батерията от k последователно свързани елемента *е* $(k\mathcal{E})$, работата на ЕДС на източника в случая е:

$$W_k = q(C\mathcal{E}) = kC\mathcal{E}^2 .$$

Общата работа на ЕДС в батерията е:

$$W' = \sum_{k=1}^{n} W_k = C\mathcal{E}^2 \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}C\mathcal{E}^2 . \tag{3}$$

Част от тази работа отива за натрупване на енергия в кондензатора, останалата представлява интересуващите ни топлинни загуби. Тъй като натрупаната в кондензатора енергия е колкото в първия случай и се описва с формула (1), от (3) и (1) следва, че във втория случай топлинните загуби в резистора са:

$$W^2 = W' - W = \frac{n(n+1)}{2}C\mathcal{E}^2 - \frac{n^2}{2}C\mathcal{E}^2 = n\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2 . \tag{4}$$

Сравнението между (4) и (2) показва, че при втория начин на зареждане на кондензатора загубите в топлинна енергия са n пъти по-малки.