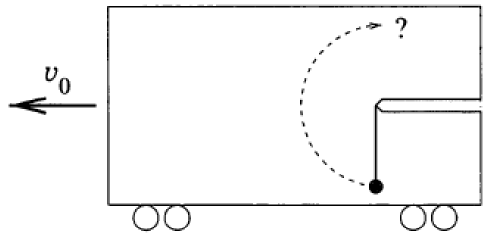
Махало в спиращ вагон

Задача: Тежко топче виси на вертикална нишка в равномерно движещ се вагон (фиг. 1.). В определен момент вагонът започва да спира равнозакъснително. При какви условия топчето може да опише дъга от 180°, като нишката остава опъната и над точката на окачването?



Фиг. 1.

Напомняне. Преди да решим задачата припомняме **определението** за кинетична енергия на едно тяло, което по-долу се използва неколкократно:

Нарастването на кинетичната енергия на едно тяло е равно на работата на всички сили, които действат на тялото.

Анализ: Решението е по-прозрачно в отправна система, неподвижно свързана с вагона. Ако означим с a големината на постоянното ускорение по време на спирането, в тази система на топчето действат три сили:

– насочената надолу сила на тежестта с постоянна големина mg, където m е масата на топчето, а g – земното ускорение;

– насочената хоризонтално в посока на движението фиктивна инерчна сила с големина $F = ma$, която действа до момента на спиране на вагона;

– насочената към точката на окачване (т.е. – радиална) сила на опъване на нишката, чиято големина е различна в различните точки от траекторията, така че заедно с радиалните компоненти на първите две сили осигурява необходимата за движение по окръжност центростремителна сила.

Предварително ще покажем, че **топчето не може да опише полуокръжност по време на равнозакъснителното движение на вагона**. Доказателство на това твърдение може да се получи по поне три различни начина.

1. *Енергетичен подход.* Да предположим, че махалото е описало дъга от 180°, като през цялото време са му действали и трите сили, а в най-високата точка от траекторията все още има някаква скорост v (спрямо вагона!). В този случай работата на всяка от трите сили е както следва:

– работата на насочената надолу сила на тежестта е $(-2mgR)$, където R е дължината на нишката и сме отчели, че разликата във височините на крайната и началната точка е $2R$;

– подобно на силата на тежестта, и инерчната сила е константна, което означава, че и тя е консервативна. За разлика обаче от еквипотенциалните повърхности на тежестта, които се хоризонтални, съответните еквипотенциални повърхности на $\vec{F}$ са вертикални. И тъй като началната и крайната точки на траекторията лежат върху вертикална права, общата работа на инерчната сила по тази траектория е нула. (Това всъщност означава, че колкото положителна работа е извършила силата $\vec{F}$ през първата половина от траекторията, толкова по големина е и отрицателната работа, извършена през втората половина.);

– нула е и работата на силата на опъване на нишката, защото във всеки момент тя е перпендикулярна на скоростта на топчето и следователно – и на елементарното преместване по окръжността.

Според определението за кинетична енергия нарастването на тази величина за топчето е равно на общата работа на силите, които му действат, т.е.:

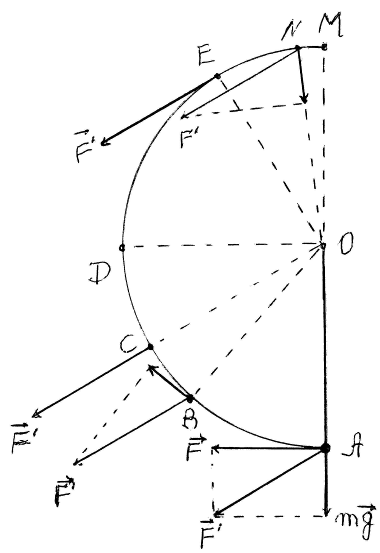
$$-2mgR + 0 + 0 = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m0^2 .$$

(Тук сме отчели, че началната скорост на топчето е нула.) Тъй като това равенство е неизпълнимо, заключаваме, че наистина докато действа инерчна сила, топчето не може да опише дъга 180° от окръжност.

Този енергетичен подход осигурява сравнително просто доказателство на твърдението, но е в известен смисъл формален и (както винаги, когато се прилага) не позволява да се вникне в детайлите на движението, тъй като третира само началното и крайното състояние на системата (в случая – на топчето).

2. *Динамичен подход*. За да разберем какво всъщност става, ще разгледаме динамиката на движението. На фиг. 2 са показани силите, които действат на топчето в различни точки от траекторията. (Опъването на нишката не е показано, тъй като то не придава тангенциално ускорение на топчето.) За да не се претрупва фигурата (освен в т. A), е изобразена само векторната сума $\vec{F}'$ от силата на тежестта и инерчната сила, т.е.:

$$\vec{F}' = m\vec{g} + \vec{F} .$$



Фиг. 2.

За конкретност приемаме, че тангенциалното ускорение на топчето от $\vec{F}'$ е положително, когато е по посока на часовата стрелка.

От фигурата се вижда, че в т. A инерчната сила $\vec{F}$ е тангенциална и създава положително тангенциално ускорение, под действие на което топчето се задвижва наляво. В същата точка силата на тежестта е радиална и насочена надолу, така че опъването на нишката трябва да я уравновеси, за да няма преместване в радиално направление.

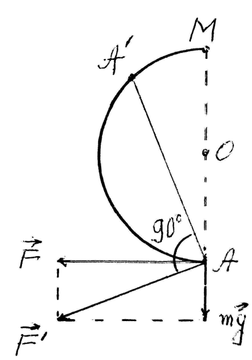
В т. B топчето вече е придобило някаква линейна скорост. От фигурата се вижда, че тангенциалната съставяща на силата $\vec{F}'$ все още създава положително тангенциално ускорение, но то е по-малко отколкото в т. A. Намаляването на тангенциалното ускорение продължава до т. C, в която то е нула, защото там силата $\vec{F}'$ е радиална. Оттук нататък за всички точки от дъгата CM тангенциалното ускорение на топчето е отрицателно и следователно по тази дъга линейната скорост постоянно намалява.

Да разгледаме сега т. E от окръжността, радиусът към която е перпендикулярен на силата $\vec{F}'$. (В тази точка отрицателното тангенциално ускорение има максимална големина.) За всички точки от дъгата AE радиалната съставяща на $\vec{F}'$ е насочена навън от точката на окачване, което гарантира опъване на нишката. По дъгата EM обаче тази радиална съставяща е насочена **към** т. O и постепенно расте (за да стане в т. M равна на mg). И тъй като линейната скорост постоянно намалява, топчето достига определена т. N, в която радиалната съставяща на $\vec{F}'$ става равна на центростремителната сила $\frac{mv^2}{R}$, необходима за движение със скорост v по окръжност с радиус R. В тази точка опъването на нишката е нула и при по-нататъшното издигане на топчето и намаляване на скоростта му това опъване остава нула – топчето се движи само под влияние на постоянната сила $\vec{F}'$. Движението му е като на тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта – по парабола, но парабола, чиято ос е не вертикална, а успоредна на $\vec{F}'$, при което разстоянието до т. O намалява. Когато по нисходящата част на параболата скоростта на топчето нарасне достатъчно, нишката отново може да се опъне и движението по окръжност да се възстанови.

Така от динамична гледна точка се обяснява защо топчето не може да опише полуокръжност по време на равнозакъснителното движение на вагона.

3. *Геометричен подход*. Преди да изложим същността на този подход, ще припомним, че според закона за запазване на енергията, когато едно неподвижно тяло започне да се движи близо до земната повърхност под действие на силата на тежестта, какъвто и да е видът на траекторията му, то не може да се издигне на височина, по-голяма от тази, от която е започнало движението си. (Това е в сила за движения на маниста по нишки с различна форма, на топки, търкалящи се по различни улеи и т.н.) Казано с други думи, тялото не може да се издигне над еквипотенциалната повърхност, от която е тръгнало.

Движението на топчето е подобно на движение в хомогенно поле, което му действа с константна сила $\vec{F}'$. “Еквипотенциалните повърхности” на това “поле” са перпендикулярни на $\vec{F}'$. Затова, ако прекараме през началната т. A отсечката AA' (фиг. 3), която е перпендикулярна на $\vec{F}'$, тя ще представлява еквипотенциална повърхност и топчето не може да се издигне над нея. Следователно дъгата $A'M$ наистина остава недостъпна за топчето.



Фиг.3.

Разбира се, този елегантен подход само условно може да се нарече *геометричен*.

Заключение: за да опише топчето дъга от 180°, вагонът трябва да спре движението си в някакъв момент още по време на издигане на топчето. Следващият въпрос е – в кой момент трябва да спре вагонът?

Преди всичко да отбележим, че ако ускорението на влака не е достатъчно голямо, топчето не може да достигне т. M. Наистина, да разгледаме случая $a << g$. В този случай инерчната сила не може да извърши достатъчно работа и да придаде на топчето енергията, необходима за издигането му до т. M с необходимата за движение по окръжност скорост. В случая на малко a топчето ще извършва периодично люлеене около равновесно положение, определяно от резултантната сила $\vec{F}'$. Следователно трябва да съществува някакво минимално ускорение a, за да може инерчната сила $\vec{F}$ да придаде достатъчно енергия на топчето. При това трябва да осигурим на $\vec{F}$ условия, при които тя да извършва максимално количество положителна работа. Тъй като работата на $\vec{F}$ е положителна само по дъгата AD (фиг.2), която е 90°, това дава отговор и на последния въпрос: ускорението на влака трябва да е такова, че той да спре в момента, в който топчето с нишката заемат хоризонтално положение.

Решение: Нека вагонът спре в момента, когато махалото е в хоризонтално положение. До този момент работата на инерчната сила е maR (както при движение в хомогенно гравитационно поле, но сега ускорението е насочено напред). От него нататък движението продължава само под действието на силата на тежестта и на опъването на нишката (която не извършва работа!). Да предположим, че работата на инерчната сила е била достатъчна и топчето е достигнало т. M с някаква скорост v. При прехода от т. A в т. M инерчната сила е извършила върху топчето работа maR, силата на тежестта – работа $(-2mgR)$, и от определението за кинетична енергия следва равенството:

(1) $$maR - 2mgR = \frac{1}{2}mv^2.$$

За да бъде нишката опъната и в т. M, действащата в радиално направление сила на тежестта трябва да бъде по-малка от центростремителната сила $\frac{mv^2}{R}$ – в този случай опъването на нишката осигурява недостигащата центростремителна сила. С други думи, трябва да е изпълнено неравенството:

(2) $$mg < \frac{mv^2}{R}.$$

От (1) и (2) получаваме, че ускорението при забавеното движение на вагона трябва да удовлетворява неравенството:

(3) $$a > 2{,}5g.$$

Че (3) не зависи от масата на топчето и от дължината на нишката е донякъде разбираемо. Не е изненадващ и фактът, че (3) не зависи от началната скорост v_0 на вагона – дотук използвахме отправна система, неподвижно свързана с вагона и няма как v_0 да се отрази на получените резултати. От друга страна обаче е ясно, че v_0 не може да бъде и неограничено малко. Наистина, при малко v_0 и ускорение, което удовлетворява неравенство (3), вагонът спира твърде рано, преди още махалото да е стигнало хоризонтално положение. Затова към (3) трябва да се добави и условието скоростта v_0 на вагона да е достатъчно голяма, за да може махалото да достигне хоризонтално положение, преди той да спре.

И така, условията, които се търсят в задачата, са две:

1. Ускорението a на вагона да бъде по-голямо от $2{,}5g$.

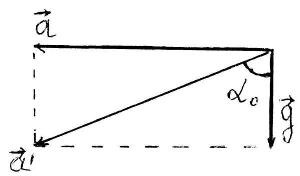
2. Началната скорост v_0 на вагона да бъде достатъчно голяма, за да може махалото да застане в хоризонтално положение преди той да спре.

Разсъждения върху второто условие. Докато първото от условията е ясно, второто е неопределено – коя начална скорост е “достатъчно голяма”? На този въпрос не може да се отговори с елементарни средства и представа за трудностите дават следните разглеждания.

Спрямо използваната отправна система характерът на движението на топчето е като на математично махало, което обаче се намира в две хомогенни, взаимно перпендикулярни полета: едното, полето на силата на тежестта, му придава ускорение g, насочено надолу, другото – на инерчната сила $\vec{F}$, придава ускорение a, насочено напред. Големината на общото ускорение е (фиг. 4):

(4) $$a'=\sqrt{g^2+a^2}\,,$$

а посоката му – посоката на сумата от векторите $\vec{g}$ и $\vec{a}$, т.е. – по хипотенузата на правоъгълния триъгълник с катети a и g. Направлението на тази хипотенуза определя и "равновесното" положение на махалото по време на спиране на вагона.



Фиг. 4.

Нека ускорението при спиране на вагона е минималното, удовлетворяващо (3), т.е. нека a = 2,5g. От фигурата се вижда, че в този случай началното отклонение α_0 на махалото от "равновесното" му положение, е ъгъл, чиито тангенс е $\mathrm{tg}\alpha_0=\dfrac{a}{g}=2{,}5$, което означава, че самият ъгъл е $\alpha_0\approx 68°$. Този ъгъл не е малък и затова характерът на движението е по-сложен от хармоничните люлеения на математично махало.

Забавяйки движението си с ускорение a = 2,5g, вагонът би спрял след време $t=\dfrac{v_0}{a}=\dfrac{v_0}{2{,}5g}=0{,}4\dfrac{v_0}{g}$. За да придадем количествен характер на второто условие, би следвало от закона за движение на махалото (който не се изразява с елементарни функции!) да намерим израз и за интервала време t', през който, тръгвайки без начална скорост от начален ъгъл на отклонение 68°, махалото се отклонява от другата страна на "равновесното" си положение на ъгъл 22° (68° + 22° = 90°). Тогава количествен израз на второто условие би било неравенството $0{,}4\dfrac{v_0}{g}>t'$.

Внимание – възможна грешка! Ако не се отчетат всички обстоятелства, може да се направи следното **погрешно** разглеждане, което предлага привидно прост начин за намиране долна граница за началната скорост v_0, необходима за издигане на топчето на височина 2R над началното равнище.

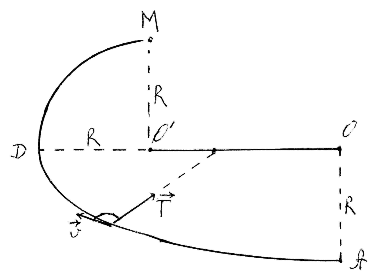
Да разгледаме движението на махалото в инерциална отправна система, неподвижна спрямо земната повърхност. В нея на топчето действат само тежестта и опъването на нишката. Ако отчитаме гравитационната потенциална енергия от началното положение на топчето, при равномерното движение на вагона неговата енергия е $\dfrac{mv_0^2}{2}$. В крайното състояние гравитационната потенциална енергия на топчето е 2mgR, а кинетичната му енергия – $\dfrac{mv^2}{2}$. *Тъй като опъването на нишката не извършва работа,* от закона за запазване на енергията следва равенството:

(4) $$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + 2mgR\,.$$

И тъй като, за да бъде нишката изпъната и в крайното състояние, трябва да бъде изпълнено и неравенство (2), чрез елиминиране на v от него и от (4) получаваме:

(5) $$v_0 > \sqrt{5gR}\,.$$

Къде е **грешката**? Отговор: в твърдението, отпечатано по-горе с наклонени букви! Опъването на нишката не извършва работа, когато топчето се движи по окръжност – само в този случай силата е перпендикулярна на моментната скорост (т.е. – на едно малко преместване по траекторията). За свързания със земната повърхност наблюдател обаче траекторията на топчето не е окръжност! На фиг. 5 е показан примерен вид на траекторията за случая на вагон, спиращ в момента, когато махалото е хоризонтално.



Фиг. 5.

Дължината на отсечката *OO'* е равна на разстоянието, изминато от вагона при равнозакъснителното му движение. Част от окръжност е само дъгата *DM*, докато дъгата *AD*, е по-сложна крива. Вижда се, че, освен в т. *A* и в т. *D*, в останалите точки на дъгата *AD* опъването на нишката $\vec{T}$ сключва тъп ъгъл с моментната скорост. Следователно по пътя от т. *A* до т. *D* опъването $\vec{T}$ извършва някаква отрицателна работа и точно нея не сме отчели при извода на (5). Ако означим тази работа с $-A$ ($A > 0$), определението за кинетичната енергия води до равенството:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -2mgR - A\,.$$

Като изключим оттук и от (2) скоростта v, за началната скорост получаваме:

(6) $$v_0 > \sqrt{5gR + \frac{A}{m}}\,.$$

Сравнението между (6) и (5) показва, че грешката с не отчитане на работата *A* на опъването на нишката води до занижена долна граница на началната скорост.

И все пак! И все пак, има случай, в който формула (5) правилно определя долната граница за началната скорост на вагона. За да разберем кой е той, ще припомним грешката при извода на (5) – не отчетохме работата $-A$ на опъването на нишката по дъгата *AD* (фиг. 5). Следователно формула (5) ще дава правилен отговор в случай, че тази работа е нула. Работата на една сила е нула или когато силата е перпендикулярна на преместването (това не е нашият случай), или когато самото преместване е нула. Кога дължината на дъгата *AD* ще бъде нула? Отговорът е очевиден – когато и разстоянието *OO'*, изминато от вагона е нула. А това е случаят на безкрайно голямо ускорение – вагонът спира мигновено (както например при удар в непробиваема стена). За този случай и от фиг. 3 се вижда, че при $a \to \infty$ отсечката *AA'* става вертикална и недостъпният за топчето участък *A'M* изчезва. В този случай вече всички предпоставки, при които бе изведена формула (5), са изпълнени.

Тези разсъждения са хубав пример за прилагане метода на екстремните ситуации ($a \to \infty$).