Еластични удари – преразпределение на енергията

При централни еластични удари между две сфери става преразпределение на енергията на системата и законите за запазване на енергията и импулса са достатъчни за пресмятане на количеството енергия, преминало от едното тяло към другото. В зависимост от скоростите и масите на телата са възможни всякакви преразпределения – включително размяна на енергиите и т.н.

Интересни ситуации възникват, когато във взаимодействието участва и трето тяло – например Земята, с нейната "безкрайно голяма" маса. Ако разгледаме система от две неподвижни топчета с маси m_1 и m_2, издигнати на една и съща височина над пода, отношението между гравитационните потенциални енергии на двете части на системата е равно на отношението между техните маси – m_1/m_2.

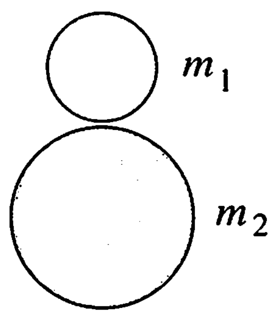
Да си представим, че топчетата започнат да падат едновременно едно до друго (съпротивлението на въздуха се пренебрегва). Лесно се съобразява, че и преди, и след еластичния удар в пода, във всеки момент както отношението между кинетичните им енергии, така и отношението на потенциалните им енергии не се променя, което означава, че и отношението между общите енергии е все равно на m_1/m_2. Нищо неочаквано – топчетата взаимодействат само със Земята, но не и помежду си.

Ситуацията се променя, когато топчетата се намират не едно **до** друго, а едно **върху** друго. За определеност ще смятаме, че радиусите им са малки спрямо h, така че няма нужда да отчитаме разликата във височините на началните им положения.

И така, разглеждаме следната задача.

Задача. Две еластични топчета с маси m_1 и m_2 се намират едно върху друго и са пуснати едновременно да падат към пода. При какво отношение между масите им след удара горното топче получава максимална част от общата енергия на системата?

Решение. За определеност смятаме, че масата на горното топче е m_1 (фиг. 1). Движенията описваме спрямо отправна система с ос Ox, насочена вертикално нагоре. За да избегнем използването на вектори, работим с техните проекции върху така избраната ос.



Фиг. 1.

Щом тръгват от една и съща височина, двете топчета достигат пода с една и съща скорост ($-v$). Разглеждаме ситуацията в момента, в който топчето с маса m_2 вече е претърпяло удар и отскача нагоре. Тъй като този първи удар е еластичен в тяло с безкрайно голяма маса, тялото отскача със същата по големина скорост, но насочена нагоре. В същия момент обаче в него със скорост ($-v$) се удря топчето с маса m_1 (втори удар) и в този момент става преразпределението на енергиите, което ни интересува.

Ако с u_1 и u_2 означим скоростите на двете тела след втория удар, законите за запазване на енергията и импулса ни осигуряват две уравнения:

$$\frac{m_1v^2}{2}+\frac{m_2v^2}{2}=\frac{m_1u_1^2}{2}+\frac{m_2u_2^2}{2}$$

$$m_1(-v)+m_2v=m_1u_1+m_2u_2\,.$$

Без да вникнем в условието на задачата, се изправяме пред неприятната задача да решаваме тази система спрямо неизвестните скорости на телата след удара, а след това да търсим максимум на u_1 в зависимост от съотношението между масите. Задачата изисква обаче да намерим при какво съотношение m_1/m_2 след ударите първото топче отнася *максимална част от общата енергия на системата*. Очевидно е, че горното топче ще получи максимална част от общата енергия, ако след удара му в долното топче последното остане неподвижно, т.е. – ако е възможно да се достигне $u_2 = 0$. Това условие силно опростява системата и тя придобива вид:

$$(m_1 + m_2)v^2 = m_1 u_1^2$$
$$(m_2 - m_1)v = m_1 u_1 .$$

Неизвестните в нея са две – търсеното отношение на масите и скоростта на горното топче. Нейното решение вече се намира без дълги пресмятания и резултатът е:

$$m_1 = \frac{m_2}{3} \qquad \text{и} \qquad u_1 = 2v .$$

Следователно, ако горното топче е три пъти по-леко от долното, след ударите долното остава неподвижно, а горното отскача с два пъти по-голяма скорост от скоростта, с която е достигнало пода. Това означава, че след удара то се издига на четири пъти по-голяма височина от височината, от която е пуснато ($h = \dfrac{v^2}{2g}$).

По-нататък. Интересно е, че това не е максималната височина, на която може да се издигне горното топче след двойния удар. Наистина, да разгледаме случая, когато масата на горното топче е много по-малка от масата на долното (т.е. $\dfrac{m_1}{m_2} \to 0$). Най-лесно е в този случай да разгледаме втория удар в система, неподвижно свързана с долното топче. В тази система скоростта на горното преди удара е $(-2v)$. И тъй като и вторият удар сега е като в стена ($m_2 \to \infty$), след него скоростта на топчето просто сменя знака си и става $2v$. Тъй като обаче самата отправна система се движи нагоре със скорост v, скоростта на лекото топче спрямо пода ще бъде $2v + v = 3v$. Това вече означава, че топчето ще отскочи на 9 пъти по-голяма височина от тази, от която е пуснато.[1]

Противоречие между това заключение и решението на задачата няма. На пръв поглед като че ли в случая, когато лекото топче отнася цялата енергия на системата, би трябвало да се изкачи на най-голяма височина. В допълнително разгледания случай обаче топчето отнася нищожна част от общата енергия на системата (основната част остава в по-масивното долно топче), и въпреки това се издига повече от два пъти по-високо (9 > 2.4), защото е твърде леко.

Последното твърдение може да се изкаже и по следния начин. Когато горното топче не е достатъчно леко (напр. $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{1}{3}$), дори цялата енергия на системата не е достатъчна, за да го издигне на височина, превишаваща четири пъти началната. Ако обаче то е достатъчно леко ($m_1 \to 0$), дори и малка част от **общата** енергия на системата е достатъчна, за да достигне то височина, девет пъти превишаваща началната.

---

[1] По-подробен анализ на този случай, на по-сложния случай с n-топки, както и литература по въпроса може да се намери в: **Попов Хр.** *53 + 15 решени физични задачи*, С., Просвета, 2000, с. 91.