Задачата за трите охлюва и поуката от нея[1]

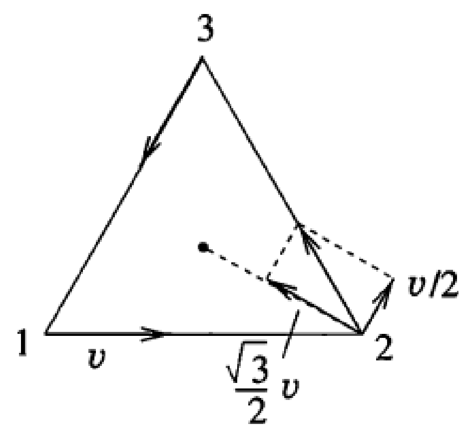
Задача. Три охлюва се намират във върховете на равностранен триъгълник със страна 60 cm. В един момент първият от тях тръгва към втория, вторият тръгва към третия, а третият – към първия. Всеки охлюв се движи с постоянна по големина скорост от 5 cm/min, като във всеки момент скоростта му е насочена към охлюва, към който е тръгнал. След колко време охлювите ще се срещнат и какво разстояние ще измине всеки от тях до срещата? Какво е уравнението на траекториите, по които се движат? Ако може да ги разглеждаме като материални точки, колко обиколки около точката на срещата ще направи всеки охлюв?

Дадено: l = 60 cm, v = 5 cm/min.

Търси се: t, s, уравнението на траекторията.

Анализ. Симетрията в условието на задачата (трите охлюва са във върховете на *равностранен* триъгълник, големините на скоростите им са *еднакви*, началните посоки на скоростите – *еднотипни*) подсказва, че срещата на охлювите може да бъде само в центъра на триъгълника. Това важно заключение може да се използва за търсене отговор на първите два въпроса.

Решение. На фиг. 1 скоростта на втория охлюв е представена като сума от две компоненти – едната насочена към центъра, другата – перпендикулярна на първата. Като отчетем, че ъгълът при върха на триъгълника е 60°, а половинката му – 30°, както и факта, че sin30° = 1/2, а cos30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, лесно съобразяваме, че големините на двете компоненти са точно колкото е указано на фигурата. При това особено важно е, че поради запазването на симетрията (във всеки момент след началото на движението охлювите се намират също във върхове на равностранен триъгълник, но със съответно по-къса страна и с друга ориентация на страните), големината на насочената към центъра компонента е **постоянна** с времето и равна на $\frac{\sqrt{3}}{2}v$.



Фиг. 1.

[1] Това е една известна задача и е първата от задачите в сборника на P. Gnadig, G. Honyek, K. F. Riley *200 Puzzling Physics Problems*, издадена през 2001 г. от Cambridge University Press. Книгата е достъпна в интернет и е безкрайно подходяща за развиване на творческите способности на ученици, показващи интерес към физиката, както, разбира се, и за учителите, които имат вкус към нетривиалните задачи.

Височината на равностранен триъгълник със страна l е $l\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}l$, а тъй като центърът на триъгълника дели височината в отношение 2:1, разстоянието от върха до центъра е 2/3 от височината, т.е. $\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}l = \frac{l}{\sqrt{3}}$.

И така, пътят на охлюва до центъра е $\frac{l}{\sqrt{3}}$, а скоростта, с която приближава центъра – $\frac{\sqrt{3}}{2}v$. Така отговорът на първия въпрос се намира елементарно:

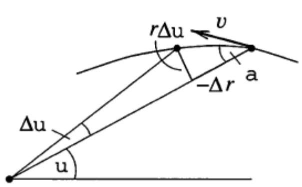
$$t = \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right) : \left(\frac{\sqrt{3}}{2}v\right) = \frac{2l}{3v}.$$

Заместването на числените стойности за l и v в този израз дава търсения отговор: охлювите ще се съберат в центъра след 8 минути.

Тъй като големината на скоростта на всеки охлюв, независимо от посоката й, е една и съща – v = 5 cm/min, ясно е, че до срещата всеки охлюв ще измине път s = (5 cm/min).(8 min) = 40 cm.

Намирането на уравнението на траекторията вече не може да стане с елементарни средства. За целта използваме факта, че във всеки момент посоката на скоростта на даден охлюв сключва **фиксиран** ъгъл $\alpha = 30°$ с посоката към една фиксирана точка – центъра на триъгълника. Това подсказва, че е удобно уравнението на траекторията да се търси в полярни координати (r,u), където r е радиус-векторът на охлюва с начало в центъра на триъгълника, а u – неговият полярен ъгъл, отчитан от произволно фиксирано направление. При това положение от фиг. 2 се вижда, че *увеличението* du на полярния ъгъл и *намалението* dr на големината на радиус-вектора са свързани с равенството:

$$\frac{dr}{du} = -r(u)\cot g\alpha.$$



Фиг. 2.

Като разделим променливите, получаваме диференциалното уравнение:

$$\frac{dr}{r} = -(\cot g\alpha)du.$$

След интегриране намираме:

$$\ln r = -u\cot g\alpha + \ln r_0,$$

като за удобство интеграционната константа сме означили с $\ln r_0$. Окончателния вид на решението, т.е. уравнението на траекторията намираме след антилогаритмуване:

$$r(u) = r_0 e^{-u\cot g\alpha}.$$

Оттук става ясен смисълът на въведената по-горе константа – r_0 е разстоянието до центъра в началния момент, т.е. при u = 0.

Крива с полученото уравнение се нарича *логаритмична спирала.* От уравнението се вижда, че $r \to 0$, когато ъгълът $u \to \infty$, т.е. точката достига центъра след като направи безкраен брой завъртания около него. Въпреки това, в съгласие с получените в началото резултати, и времето за изминаване на кривата, и дължината на изминатия път са крайни.

И така, ако охлювите бяха *материални точки,* всеки от тях до срещата би направил безкрайно много обиколки около центъра на триъгълника. Тъй като размерите им обаче са крайни, краен ще бъде и броят на обиколките до срещата. Точната стойност на този брой не може да се пресметне, тъй като не са зададени размерите на охлювите.

Между другото. За да летят по права линия, нощните насекоми се стремят да поддържат постоянен ъгъла между посоката на скоростта си и посоката към някой далечен източник на светлина – например Луната. Случва се обаче някоя близка лампа да ги дезориентира и те започват да я обикалят по логаритмична спирала. Тъй като нито лампата, нито насекомото са материални точки, рано или късно насекомото се блъска в лампата. Краят на движението може да бъде по-трагичен за насекомото, ако дезориентиращият източник на светлина е не лампа, а пламък.

Коментар. Решението на задачата е поучително с това, че много ясно демонстрира какво печелим от използване на симетриите. Наистина – то изглежда удивително просто, но тази простота се дължи единствено на симетрията, която гарантира, че:

– охлювите ще се срещнат в центъра на триъгълника;

– във всеки момент те остават във върховете на равностранни триъгълници с все по-намаляващи размери, което от своя страна гарантира, че компонентата на скоростта, насочена към центъра, остава постоянна по големина.

За да оценим печалбата от използването на симетрията, нека си представим как би решавал задачата човек, който използва традиционния метод. За целта той трябва да преведе на езика на математиката данните от условието. Ако означим радиус-векторите на трите охлюва с $\vec{r}_i,\ (i = 1,2,3)$, тогава скоростите им биха били $\vec{v}_i = \dfrac{d\vec{r}_i}{dt}$, и, в съответствие с условието на задачата, моментната скорост на първия охлюв ще бъде $\vec{v}_1 = \dfrac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} v$. Аналогични изрази можем да напишем и за скоростите на втория и на третия охлюв. Тогава трите закона за движение биха се получили от решаване на следната система от **нелинейни** обикновени диференциални уравнения от първи ред:

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - r_1|} v, \qquad \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - r_2|} v, \qquad \frac{d\vec{r}_3}{dt} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - r_3|} v.$$

Един по-обигран в решаване на диференциални уравнения специалист може и да намери общото решение на системата, още повече, че тя също съдържа симетрията, от която се възползвахме по-горе. (Дали този процес няма да се опрости при работа в полярни координати?) След това ще трябва да намери и частното решение, което се определя от зададените в условието начални условия.

Очевидно е, че този път е много по-дълъг и изисква прилагане на методи, лежащи далеч извън границите на училищната математика. Вярно е – неговата висока цена в края осигурява много по-богата информация: на изхода ще имаме законите за движение на всеки от трите охлюва. Само че условието на задачата не изисква това...