Два кораба и два гълъба

Задача. Два платнохода *К'* и *К''* плават един срещу друг с постоянни скорости с големина *v'* и *v''*. В момента, когато разстоянието между корабите е s_0, от всеки кораб към насрещния полита гълъб (*Г'* и *Г''*) с писмо. Големината *v* на скоростта на гълъбите е еднаква. След като доставят писмата, незабавно и със същата скорост гълъбите се връщат на своя кораб. Кой гълъб се връща пръв[1]?

Анализ. От условието на задачата се подразбира, че скоростта на гълъбите не зависи от скоростта на корабите, т.е. това не е задача, която изисква познаване на закона за събиране на скорости. (Във всички случаи като отправно тяло е избрана водната повърхност.)

Тъй като в решението се използват твърде много величини, още в началото уточняваме означенията: величините, отнасящи се до корабите или гълъбите различаваме по наличието или по липсата на горен индекс (') и (''); с долен индекс 0, 1, 2, 3 ... номерираме точките и моментите време, в които се намира някой от корабите или от гълъбите; с два долни индекса – напр. „12" – прехода от точката с индекс „1" до точката с индекс „2" ; с „21" – обратния преход и т.н.

В тривиалния случай $v'' = v'$ (еднакви скорости на корабите) отговорът на задачата е очевиден – не са необходими аргументи в полза на твърдението, че гълъбите ще са върнат на своите кораби едновременно. Основание за подобно твърдение е пълната **симетрия** на ситуацията: корабите плават един срещу друг с еднакви скорости, гълъбите излитат едновременно и през цялото време летят между тях с еднакви скорости... Дори за човек, незапознат със законите за движение, едва ли има смисъл да се обяснява какво в случая означава **симетрия**.

От тези съображения интересен е само случаят, когато скоростите на корабите са различни. За конкретност ще смятаме, че *К'* е по-бърз от *К''*, т.е.:

(1) $$v'' < v' < v.$$

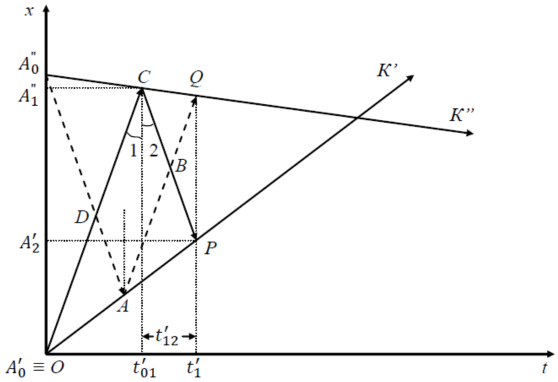
(Очевидно задачата има смисъл само ако скоростта *v* на гълъбите е по-голяма от скоростта на всеки от корабите – в противен случай ще настъпи момент, в който поне един от гълъбите ще се намира извън отсечката, свързваща корабите и задачата става безсмислена.)

Може да се предположи, че щом летят с еднакви скорости, въпреки различните скорости на корабите, гълъбите ще приключат мисиите си отново едновременно. При по-подробно разглеждане на движенията обаче това предположение поражда съмнения. Наистина, поради това, че в началото гълъбът *Г''* лети към по-бързия кораб *К'* (вж. (1)), разстоянието, което трябва да преодолее през първата част на полета си, намалява по-бързо отколкото разстоянието, което трябва да преодолее *Г'*. Следователно писмото за *К'* със сигурност ще се получи преди писмото за *К''*. При обратния полет обаче *Г''* лети към по-бавния кораб *К''*, т.е. разстоянието до целта му сега намалява по-бавно, отколкото намалява разстоянието, преодолявано от *Г'*. Тъй като разстоянията, които трябва да преодолеят гълъбите на връщане са по-малки от тези на отиване, не е ясно дали двете противоположни тенденции се компенсират.

Друго основание да се съмняваме, че гълъбите ще се върнат едновременно на корабите си дава разглеждането на обратния случай: когато скоростите на корабите са еднакви, но скоростите на гълъбите – различни. И в този случай, без пресмятания може да се съобрази, че по-бързият гълъб ще се върне по-рано на своя кораб.

Графично решение. На фиг. 1 са показани графики на движенията на корабите и на гълъбите.

[1] Нищо в решението и в резултата няма да се промени, ако условието се преформулира така, че в него участва един гълъб, който излита и се връща веднъж от по-бързия и втори път – от по-бавния кораб. Тогава въпросът ще бъде в кой случай ще му бъде необходимо по-кратко време, за да изпълни мисията си.



Фиг. 1.

Във всеки момент t положението на телата се определя координатата x, отчитана от началното положение на K'. Началните положения на корабите са означени с A_0' и A_0''.

Тъй като движенията са равномерни, четирите зависимости на x от t са линейни и затова графиките – праволинейни. Колкото по-голяма е скоростта на движение, толкова по-стръмна е съответната права. (Когато тяло се движи в посока, обратна на оста Ox, съответната права сключва с ординатата ъгъл, по-голям от 90°.)

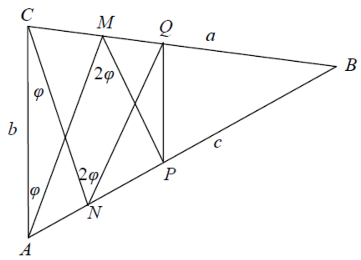
На фиг. 1 правата $A_0'K'$ съответства на движението на K', правата $A_0''K''$– на движението на K'', а начупената линия $A_0'CP$ – на движението на гълъба Γ'. От последната се вижда, че тръгвайки от т. O, в момента t_{01}' гълъбът пресреща кораба K''в т. C, след което в момента t_1'се връща на K' в т. P. Тъй като в двете посоки големината на скоростта му е една и съща, двата ъгъла, означени с „1” и „2” са равни.

На същата фиг. 1 щрихованата начупена линия OCP съответства на движението на гълъба Γ'', който в т. A пресреща K', след което в т. Q се връща на K''. Тъй като и Γ'' лети със скорост v, отсечките $A_0''A$ и CP са успоредни, както са успоредни $A_0'C$ и AQ.

От чертежа се **вижда**, че т. P и т. Q лежат на вертикална права, т.е. като че ли наистина двата гълъба се връщат на своите кораби едновременно в момент t_1'. Фактът обаче, че правата през т. P и т. Q е вертикална подлежи на доказване, защото от това, че нещо „се вижда” не следва, че то е вярно – възможно е, първо, чертежът ни да не е точен и, второ, при друго съотношение между скоростите v', v'' и v, т.е. при друг наклон на правите, отсечката PQ може да не е вертикалната. Затова, за да бъде задачата наистина решена графично, е необходимо да се използват знания и уменият получени в обучението по геометрия.

В един сборник със задачи по геометрия условието на съответната задача би изглеждало примерно по следния начин:

Нека φ е произволен остър ъгъл, по-малък от всеки от ъглите ACB и CAB на остроъгълния триъгълник ABC (фиг.2). Точките M, Q и N, P са подбрани така върху страните a и c на триъгълника, че ъглите ACN и CAM са равни на φ, а ъглите CNQ и AMP – на 2φ. Да се докаже, че отсечките AC и PQ са успоредни.

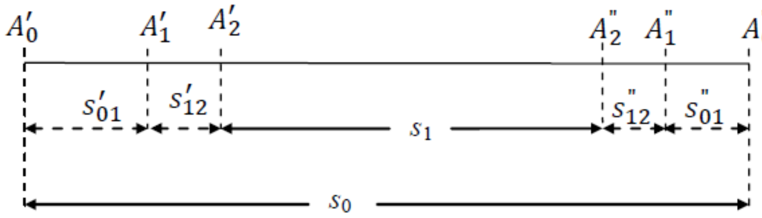


Фиг. 2.

За доказателството са достатъчни знанията по геометрия, получавани понастоящем по математика в 8. клас. Връзката между геометричната и физичната задачи става очевидна, ако някои от означенията на фиг. 2 се сменят с използваните на фиг. 1 както следва: $A \rightarrow A_0'$, $C \rightarrow A_0''$, $N \rightarrow A$ и $M \rightarrow C$.

Тъкмо тази простота на графичния метод в додигиталната ера обуславя широкото му приложение за решване на транспортни задачи (съставяне на разписания на влакове, автобуси и т.н.).

Аналитично решение. За да решим задачата аналитично, първо пресмятаме времето t', за което се справя със задачата си гълъбът *Г'*. То е сбор от времето t_{01}' за прелитане от т. A_0' до срещата с *К"* в т. A_1'', и времето t_{12}' за връщането му от т. A_1'' в т. A_2', до която е достигнал *К'* (фиг. 3).



Фиг. 3.

За времето t_{01}' гълъбът *Г'* прелита път vt_{01}', докато за същото време *К"* се е преместил от т. A_0'' до т. A_1'', изминавайки път $s_{01}'' = v''t_{01}'$. Сборът от тези пътища е равен на началното разстояние между корабите, т.е.:

(2) $$s_0 = vt_{01}' + v''t_{01}'.$$

Оттук намираме, че *Г'* достига *К"* за време:

(3) $$t_{01}' = \frac{s_0}{v+v''}.$$

В момента, когато *Г'* достига *К"*, първият кораб, *К'*, е скъсил разстоянието между корабите с $s_{01}' = v't_{01}' = \frac{v'}{v+v''}s_0$. Както отбелязахме по-горе, за същото време *К"* е скъсил това разстояние с $s_{01}'' = v''t_{01}' = \frac{v''}{v+v''}s_0$. Следователно в момента, когато гълъбът *Г'* започва обратния полет ситуацията е като началната, но разстоянието между корабите вече не е s_0, а:

(4) $$s_0' = s_0 - s_{01}' - s_{01}'' = \frac{v-v'}{v+v''}s_0.$$

Това твърдение позволява да запишем изрази за времето t_{12}', необходимо за връщане на *Г'* върху *К'*, и за разстоянието s_1 между корабите в момента на завръщане, като във формули (3) и (4) просто разменим местата на v' и v'', а s_0 заменим с s_1. Така получаваме:

(5) $$t_{12}' = \frac{s_0'}{v+v'} = \frac{v-v'}{(v+v')(v+v'')}s_0$$

(6) $$s_1 = \frac{v-v''}{v+v'}s_0' = \frac{(v-v')(v-v'')}{(v+v')(v+v'')}s_0.$$

Общото време t', необходимо на *Г'* за отиване до *К"* и връщане върху *К'* е сума от t_{01}' и t_{12}'. Така с помощта на (3) и (5) получаваме:

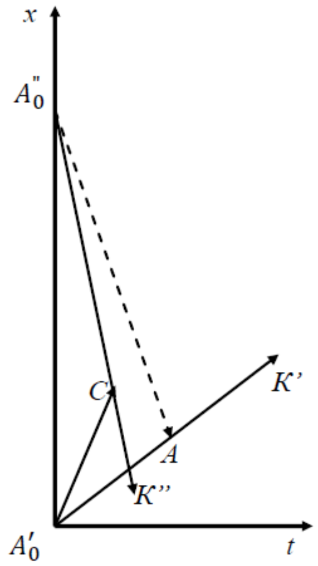
(7) $$t' = \frac{2v}{(v+v')(v+v'')}s_0.$$

Фактът, че полученият израз за t' е **симетричен** по отношение на размяната на скоростите v' и v'' гарантира, че същият израз бихме получили и ако пресмятаме времетраенето на полета на гълъба *Г"*. По такъв начин и аналитичното решение потвърждава извода, направен с помощта на графичния метод.

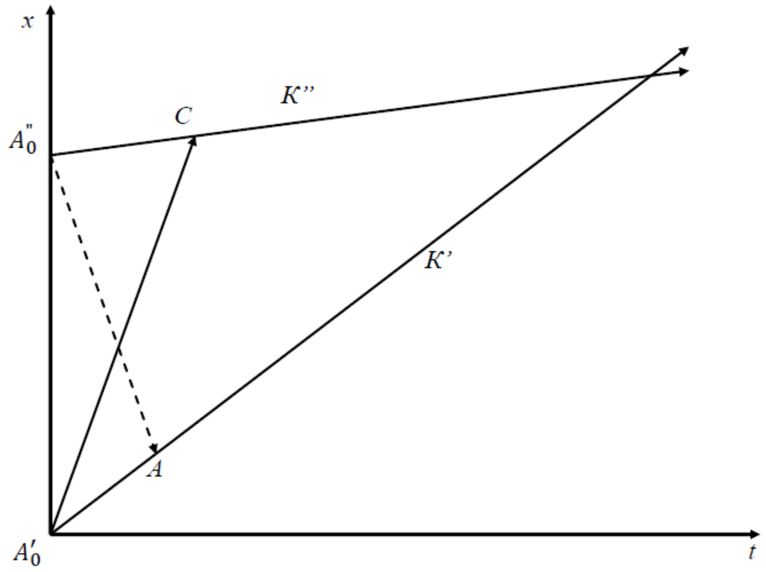
Коментар. Решената задача предлага различни възможности за развитие. Преди всичко е полезно да се провери какъв вид има фиг. 1 в следните два частни случая: споменатия в началото случай, в който $v'' = v'$, а след това – случая, в който един от корабите е неподвижен ($v'' = 0$).

След това разглежданията може да се разширят, като се изследва случаят когато корабите не се срещат, а се настигат (при досегашните предположения за съотношенията (1) между големините на трите скорости) т.е. дали и в този случай времето за отиване е връщане на един гълъб не зависи от това, от кой кораб излита.

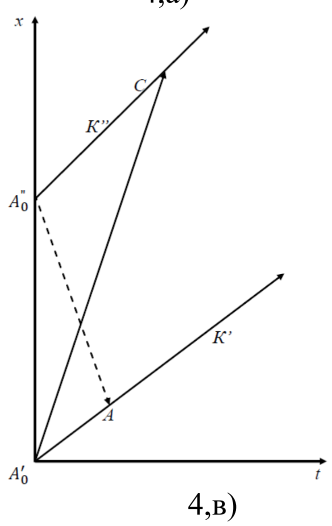
На основата на решената вече задача може да се използват няколко предварително подготвени чертежа, за да се провери доколко е овладян и за да се усъвършенства графичния метод. На чертежите са изобразени ситуации, подобни на фиг. 1. Задачата е да се открие кое е общото и кое – различно в отделните ситуации, да се довършат графиките за движенията на двата гълъба и се направят изводи при кои съотношения между скоростите гълъбите ще изпълнят задачата си и при кои – не. Да се провери дали във всички случаи, в които задачата е изпълнима, остава вярно твърдението, че гълъбите се връщат на своите кораби за едно и също враме.



4,а)



4,б)



4,в)

Общото в трите случая е, че скоростта на гълъбите и на кораба *К'* е една и съща. Разликата е в посоката и големината на скоростта на кораба *К''*, като от неравенствата (1) остава валидно само $v' < v$.

В случая, показан на фиг. 4,а корабът *К''* се движи със скорост, по-голяма от скоростта на гълъбите, така че след като срещне *К'*, гълъбът *Г''* въобще не може да настигне и се върне на своя кораб и задачата губи смисъл.

В случая, показан на фиг. 4,б скоростта на *К”* е в обратна посока, т.е. *К’*, който се движи по-бързо го настига, т.е. задачата има смисъл и трябва да се провери дали остава валидно твърдението, че гълъбите приключват мисиите си едновременно.

В случая, показан на фиг. 4,в корабите също плават еднопосочно, като *К”* се отдалечава от *К’*. Тук са възможни два подслучая: ако неравенството $v'' < v$ е все още валино, задачата все още има смисъл и трябва да се отговори на въпроса в условието назадачата. В другия случай, когато $v < v''$ гълъбът *Г’* въобще не може да настигне *К”* и задачата губи смисъл.

Накрая, може да се разгледа общият случай, в който двата гълъба летят с различни скорости, като, независимо от съотношението между скоростите на корабите, винаги „мисията” на по-бързия гълъб е по-кратка. (Разбира се, за да има задачата смисъл, всеки гълъб трябва да лети по-бързо от кораба, от който тръгва.)

Разгледаният пример показва колко далеч може да се стигне, ако не се ограничим с получаване на отговора на една задача и положим усилия да изследваме условията, при които тя има смисъл и да разширим областта на валидност на получения резултат.