Два кораба и един гълъб

(„физически” извод на формулата
за сума на безкрайна геометрична прогресия)

В училищната практика обикновено приключваме решението на една физична задача с получаване на отговора – най-често някаква формула за/или стойността на търсената величина. Така, разбира се, постигаме някои основни цели на обучението: затвърдяване на знанията, придобиване на основни умения за прилагането им и др.п. Ако обаче не се задоволим с това и продължим работата по задачата и след получаване на отговора, това може да разнообрази кръга на постижимите цели с други, като засилване на интереса към физиката, развиване на физическото мислене, запознаване с методи на науката и т.н. Тъй като силно ограниченото учебно време обикновено не позволява това да се прави в класните форми на работа, като единствена възможност остават извънкласните – например индивидуалната работа с ученици, имащи изявени наклонности към природните науки. Такива ученици обикновено има във всяка паралелка (и нерядко – повече от един). По-долу тази идея се илюстрира с помощта на пример, от който се вижда как, тръгвайки от една относително проста задача, ситуацията може да се усложни и да се получат неочаквани и интересни резултати.

В много кинематични задачи за едномерни равномерни движения се разглеждат няколко тела, които се настигат, задминават, разминават и т.н. Тук започваме с една от популярните задачи от този тип, която по сборниците се среща в различни варианти.

Задача. Два платнохода *К’* и *К”* плават един срещу друг с постоянни скорости съответно v' и v''. В момента, когато разстоянието между корабите е s_0, от *К’* към *К”* със скорост v полита гълъб. След като достигне *К”*, гълъбът полита със същата скорост обратно, среща К’ и отново лети в първоначалната посока и т.н., като остава върху отсечката, свързваща корабите. Какъв път L изминава гълъбът до срещата на корабите?

Анализ. Задачата може да изглежда сложна, ако решението се търси чрез сумиране на постоянно скъсяващите се разстояния, изминати от гълъба докато снове между корабите. Ако обаче съобразим, че времето T до срещата на корабите въобще не зависи от гълъба, задачата се решава почти на ум. Наистина, в момента на срещата сумата от пътищата $v'T$ и $v''T$ на корабите е s_0, т.е. ($v'T + v''T = s_0$), така, че срещата се осъществява след време $T = \frac{s_0}{v'+v''}$, а за това време гълъбът, прелита разстояние:

(1) $$L = \frac{v}{v'+v''}s_0 \ .$$

С други думи, за решаване на задачата е достатъчен само законът за пътя при равномерно движение (и ... известна доза съобразителност).

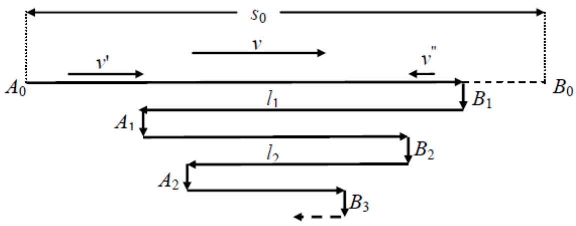
Ние обаче ще решим задачата и по по-сложния начин, защото той позволява да се получи много по-детайлна информация за полета на гълъба. (Простите съображения, с които стигнахме да отговора (1) не позволяват, например, да се отговори на въпроса колко пъти гълъбът среща кораба К’, докато разстоянието между корабите стане l.)

Накрая ще отбележим, че от условието на задачата се подразбира, че скоростта на гълъба е по-голяма от скоростта на всеки от корабите – в противен случай ако не на отиване, то на връщане гълъбът ще изостане от напуснатия кораб и корабите ще се срещнат, преди той да се върне на К’[1]. За конкретност ще решаваме задачата при предположение, че трите скорости удовлетворяват неравенствата:

(2) $$v'' < v' < v.$$

[1] Обикновено в сборниците със задачи се говори не за гълъб и кораби, а за муха, летяща между два насрещни влака. Разбира се, като по-екзотичен, този случай е и по-интересен. Той обаче е по-нереален, защото, първо, скоростта на мухата трудно би удовлетворила неравенствата (1) и, второ, гълъбът е не само по-бърз, но и по-издържлив на летене от мухата.

Решение. На фиг. 1 е показан видът на пътя на гълъба:



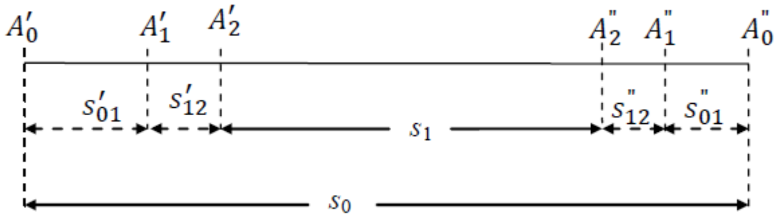
Фиг. 1.

в началния момент гълъбът и корабът *К'* тръгват от т. A_0, като корабът *К"* се намира от тях на разстояние s_0. Летейки със скорост v, гълъбът пресреща *К"* в т. B_1, връща се към *К'* и го среща в т. A_1, като общият изминат път $A_0B_1A_1$ на фиг.4 е означен с l_1.

По-нататък гълъбът извършва същото по характер движение, но вече между точките A_1, B_2 и A_2, като общият изминат път в този случай е означен с l_2 и т.н..

По такъв начин полетът на гълъба от началния момент до срещата на корабите се разделя на последователни, подобни един на друг етапи със скъсяваща се дължина. Ще потърсим изрази за продължителността t_n, дължината l_n на изминатия от гълъба път по време на n-тия етап, както и разстоянието s_n между корабите в края на този етап.

Времето t_1, необходимо на гълъба да измине първия етап е сбор от времето t_{01} за прелитане от т. A'_0 до срещата с *К"* в т. A''_1 и времето t_{12} за връщането му от т. A''_1 в т. A'_2, до която е достигнал *К'* (фиг. 2).



Фиг. 2.

През t_{01} гълъбът прелита път vt_{01}, като за същото време *К"* се премества от т. A''_0 до т. A''_1, изминавайки път $s''_{01} = v''t_{01}$. Сборът от тези пътища е равен на началното разстояние между корабите, т.е.:

(3) $$s_0 = vt_{01} + v''t_{01}$$

Оттук намираме, че гълъбът достига *К"* за време:

(4) $$t_{01} = \frac{s_0}{v+v''}.$$

В момента, когато гълъбът стигне *К"*, първият кораб, *К'*, е скъсил разстоянието между корабите с $s'_{01} = v't_{01} = \frac{v'}{v+v''}s_0$. Тъй като за това време *К"* е скъсил разстоянието с $s''_{01} = v''t_{01} = \frac{v''}{v+v''}s_0$, в началото на обратния полет ситуацията е като началната, но разстоянието между корабите вече не е s_0, а:

(5) $$s'_0 = s_0 - s'_{01} - s''_{01} = \frac{v-v'}{v+v''}s_0.$$

Следователно изрази за времето t_{12}, необходимо за връщане на гълъба върху *К'*, и за разстоянието s_1 между корабите в момента на завръщане ще получим, като във формули (4) и (5) разменим местата на v' и v'', а s_0 заменим с s_1. Така получаваме:

(6) $$t_{12} = \frac{s'_0}{v+v'} = \frac{v-v'}{(v+v')(v+v'')}s_0$$

(7) $$s_1 = \frac{v-v''}{v+v'} s_0' = \frac{(v-v')(v-v'')}{(v+v')(v+v'')} s_0.$$

Общото време t_1, необходимо на гълъба за отиване до *K”* и връщане върху *K’* е сума от t_{01}и t_{12}. Така с помощта на (4) и (6) получаваме:

(8) $$t_1 = \frac{2v}{(v+v')(v+v'')} s_0.$$

Общата дължина на пътя на гълъба през целия първи етап е:

(9) $$l_1 = vt_1 = \frac{2v^2}{(v+v')(v+v'')} s_0,$$

като, разбира се и (8), и (9) са симетрични по отношение на *v’* и *v”*.

С цел по-нататъшно опростяване записа на изразите е удобно да въведем два безразмерни параметъра ξ и η:

(10) $$\xi = \frac{2v^2}{(v+v')(v+v'')} \quad \text{и} \quad \eta = \frac{(v-v')(v-v'')}{(v+v')(v+v'')}.$$

С тяхна помощ формулите (8) – за времето t_1, (9) – за изминатия от гълъба път l_1 и (7) – за разстоянието s_1 между корабите в момента на първото завръщане на гълъба върху *K’* се записват във вида:

(11) $$t_1 = \xi \frac{s_0}{v}, \quad l_1 = \xi s_0 \quad \text{и} \quad s_1 = \eta s_0.$$

Като имаме предвид казаното по-горе за подобието на етапите и формулите (11), изразът за пътя l_2, който гълъбът ще прелети през втория етап и за разстоянието s_2 между корабите в момента на второто завръщане, ще имат вид съответно:

(12) $$l_2 = \xi s_1 = \xi\eta s_0 \quad \text{и} \quad s_2 = \eta s_1 = \eta^2 s_0.$$

По силата на същата логика съответните формули за величините при третото завръщане върху *K’* ще бъдат:

$$l_3 = \xi s_2 = \xi\eta^2 s_0 \quad \text{и} \quad s_3 = \eta s_2 = \eta^3 s_0\ ,$$

при четвъртото – $l_4 = \xi s_3 = \xi\eta^2 s_0$ и $s_4 = \eta s_3 = \xi\eta^2 s_0(1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \cdots)$ и т.н..

Тези разсъждения, заедно с получените формули водят до извода, че общият изминат от гълъба път L до срещата на корабите е:

(13) $$L = l_1 + l_2 + l_3 + \cdots = \xi s_0 + \xi s_0\eta + \xi s_0\eta^2 + \xi s_0\eta^3 + \cdots,$$

т.е. представлява сума от членовете на една безкрайна геометрична прогресия с начален член ξs_0 и частно η.

Оттук нататък съществуват две възможности. Първата е като се възползваме от това, че (2) и (10) гарантират неравенството $0 < \eta < 1$, да използваме формулата за сума на безкрайна геометрична прогресия и да покажем, че формула (13) води до същия резултат (1), който получихме в анализа чрез елементарни разсъждения. Това обаче не е интересно, защото едва ли някой се съмнява в този факт.

Ние ще се възползваме от втората, по-нетривиална възможност: все едно, че не познаваме формулата за сума на безкрайна геометрична прогресия и ще я „открием”, като използваме факта, че знаем отговора на задачата. Наистина, като приравним десните страни на (1) и на (13) и отчетем определенията (10) за ξ и η, получаваме:

(14) $$\xi s_0 + \xi s_0\eta + \xi s_0\eta^2 + \xi s_0\eta^3 + \cdots = \xi s_0 \frac{(v+v')(v+v'')}{2v(v'+v'')}.$$

За да стигнем до желания резултат, остава да изразим дробта в дясната страна на полученото равенство чрез η. За целта е необходимо да довършим следната верижка от преобразования[2]:

[2] Тук е слабият пункт в разсъжденията, защото той не подлежи на алгоритмизация, т.е. не е отнапред ясно дали дясната страна на (14) може да се изрази само чрез ξ и η. Затова тук неизбежно възниква въпросът „Как се досетихте да направите преобразованията (15)?” – въпрос, който навремето студентите задаваха на проф. Тагамлицки, когато в някое доказателство правеше непредвидима стъпка. В такъв случай професорът винаги отговаряше с характерната си усмивка и думите: „Умен човек съм, досещам се!”. В случая, разбира се, не става дума за качества на ума, а за това, че отнапред знаем отговора.

(15) $$\frac{(v+v')(v+v'')}{2v(v'+v'')} = \frac{1}{\frac{2v(v'+v'')}{(v+v')(v+v'')}} = \frac{1}{1+\frac{2v(v'+v'')}{(v+v')(v+v'')}-1} = \cdots = \frac{1}{1-\eta}.$$

По този „физичен” начин неочаквано получихме още един[3] извод на формулата за сумата на безкрайна геометрична прогресия:

(16) $$\xi s_0 + \xi s_0\eta + \xi s_0\eta^2 + \xi s_0\eta^3 + \cdots = \frac{\xi s_0}{1-\eta},$$

за който вече сме сигурни, че е валиден поне за случая $0 < \eta < 1$.

Разбира се, този извод[4] на формула (16) има един малък, но лесно поправим пропуск: ние показахме, че само първите членове на сумата в скобите на (13) са членове на геометрична прогресия. Строгото прилагане на метода на пълната математична индукция, на който негласно се позовахме в разсъжденията, изисква да докажем, че ако n-тия член на сумата има вид $a\eta^n$, то следващият е $a\eta^{n+1}$ – нещо, което в случая не е трудно.

Да сумираме: как физиката помогна да избегнем математическия проблем за доказване на сходимостта на реда от членовете на безкрайна геометрична прогресия? Отговорът е: физичните съображения осигуряват, че когато скоростта на гълъба е по-голяма от скоростта на корабите (условието, от което следва $0 < \eta < 1$), той във всеки момент се намира между двата кораба.

И по-нататък. „Физическият” извод на формула (16) може и да е любопитен, но не е достатъчен, за да оправдае решаването на задачата вместо по простия, по-сложния начин. Истинската причина за избора на сложното решение е, че получените междинни формули дават възможност да получим доста по-детайлна представа за движението на гълъба – например, за броя на срещите на гълъба с корабите.

Строго погледнато, ако разглеждаме гълъба като материална точка, до срещата между корабите гълъбът среща всеки от тях безброй пъти[5]. С цел да направим ситуацията по-реалистична, ще отчетем, че с разперени крила гълъбът има линейни размери от порядъка на, примерно, 30 cm. Ясно е, че когато разстоянието между корабите стане от порядъка на 30 cm, гълъбът вече не може да маневрира между тях и затова приемаме, че това е и моментът на срещата. Така стигаме до нова задача, в която освен скоростите и началното разстояние, е зададен още един линеен параметър – размерът на гълъба.

Задача. Два платнохода *K’* и *K”* плават един срещу друг с постоянни скорости съответно v' и v''. В момента, когато разстоянието между тях е s_0, от *K’* към *K”* със скорост v полита гълъб. След като достигне *K”*, гълъбът лети със същата скорост обратно, след срещата с *K’*отново лети в първоначалната посока и т.н., оставайки между корабите. Ако размерите на гълъба са от порядъка на d, оценете колко пъти (N) гълъбът ще срещне *K’* до срещата между корабите.

Решение. Решението се основава на продължението на разсъжденията, с които получихме формули (11) и (12). От тях следва, че в момента на N-тото си завръщане на кораба *K’* разстоянието между корабите е:

---

[3] Ако в интернет–търсачка напишете *сума на безкрайна геометрична прогресия*, ще излезят толкова много резултати, че броят им може да съперничи с този на доказателствата на теоремата на Питагор.

[4] Възможно е да възникне и друг въпрос: Защо в (14) и (16) не извадим в лявата страна множителя ξs_0 пред скоби и не го съкратим? Отговорът – защото не сме сигурни дали за безкрайните суми винаги е позволено да се вади общ множител пред скоби. Ето един пример, който показва, че понякога това не е възможно. Да означим с S сумата: $S = 1 + 2 + 4 + 8 + ...$ и да я преобразуваме по следния начин: $S = 1 + 2(1 + 2 + 4 + 8 + ...) = 1 + 2S$. Решението на полученото просто уравнение за S е $S = -1$, което, разбира се, е абсурд.

[5] В някакъв смисъл ситуацията наподобява описаната в известната апория на Зенон: Бързоногият Ахил никога не може да настигне костенурката, която има 100 метра аванс пред него, защото докато той пробяга първите 50 m, тя ще измине 10 cm, докато той пробяга следващите 25 m, тя ще се отдалечи с още 5 cm и т.н. – до безкрайност.

(17) $$s_N = \eta^N s_0.$$

Като отчетем, че сега $s_N = d$ и решим полученото уравнение спрямо N, за броя на срещите на гълъба на кораба *К'* получаваме израза:

(18) $$N = \frac{\ln\frac{d}{s_0}}{\ln\eta} = \frac{\ln\frac{d}{s_0}}{\ln\frac{(v-v')(v-v'')}{(v+v')(v+v'')}}.$$

Да приложим тази формула за един конкретен случай, за да преценим доколко е реалистичен полученият резултат. Нека корабите се движат с еднаква скорост $v' = v'' =$ 10 m/s, а гълъбът лети с два пъти по-голяма скорост, т.е. v = 20 m/s, d = 0,3 m. Ако началното разстояние между корабите е s_0 = 9 km, според формула (18) $N \approx 4{,}69$, т.е. в този случай гълъбът ще срещне кораба *К'* не повече от пет пъти – едно изненадващо малко число, но резултатът – напълно разумен.

Да разгледаме и случая на „гълъб–материална точка", т.е. случая $d = 0$. Както трябва да се очаква, в този случай от (18) следва $N \to \infty$. Този резултат е удивителен в едно отношение: за времето, за което корабите се сближават от 9 km до 30 cm, гълъбът прави само 4 – 5 „курса" между тях, а за останалите по-малко от 0,2 s (толкова е времето, за което разстоянието между корабите намалява с 30 cm) трябва да направи безкраен брой прелитания[6]!

Разсъжденията може да продължат и по-нататък. Така формулирана, задачата съдържа известна неопределеността, идваща от неопределеността на понятието *среща на корабите.* По-горе приехме, че корабите вече са се срещнали, ако гълъбът не може да маневрира между тях. Съществуват обаче и други възможности. За да направим ситуацията още по-реалистична, може да поставим въпроса доколко отговорът зависи от избора на критерий за определяне момента на среща на корабите. В случая като критерий избрахме размерите на гълъба, т.е. решихме, че полетът спира, когато разстоянието между корабите стане равно на d. А, ако тези размери са не 30 cm, а с 10 % по-малки – напр. 27 cm? Пресметната по формула (18) новата стойност на N е $N' \approx 4{,}74$, т.е. разликата от предишния резултат е само малко повече от 10 %.

За да приближим ситуацията още малко към действителността, може да отчетем, че достигайки един от корабите, гълъбът не може мигновено да смени посоката на скоростта си. Да предположим, че той кацва на кораба и полита обратно след престой от една секунда. Тогава в качеството на друг *критерий за среща* може да изберем момента, в който корабите са на разстоянието, което изминават за 1 s, т.е. на d = 20 m. Да пресметнем отново по формула (18) колко курса е извършил гълъбът, докато корабите се сближат на 20 m. Резултатът е $N \approx 2{,}78$, т.е. сега гълъбът среща *К'* само два пъти. Ако ли пък сега той „почива" върху кораба с 10 % по-малко, т.е. само 0,9 s, резултатът ще бъде $N \approx 2{,}82$ – около 1,5% по-малко от предишния случай. С други думи резултатът за N при втория критерий е по-нечувствителен към промяна на избраната величина (време за престой), отколкото в първия, когато избрахме разстоянието.

В това отношение, разбира се, нещата могат да се усложняват, както се казва, до безкрай. По-горе например ние не отчитаме, че гълъбът престоява на корабите по 1 s при всяка среща с някой от тях, а не само при последната.

Чрез подобни разглеждания можем да насочваме учениците да търсят и оценяват влиянието на различни фактори върху интересуващия ни резултат, да отсяват съществ-

---

[6] Последното твърдение се основава на равенсвото $\infty - 5 = \infty$, верността на което математиците обикновено илюстрират със следния пример. Ако искате да се настаните в хотел, в който всички стаи са заети, няма да успеете. Ако обаче хотелът е с безкраен брой стаи, въпреки че няма свободни, настаняването ви е сигурно: достатъчно е обитателят на първата стая да се прехвърли във втората, обитателят на втората – в третата и т.н., всички стари обитатели преминават в стая, чиито номер е с единица по-голям и ... така първата стая остава свободна за вас, т.е. наистина $\infty + 1 = \infty$!

вените от несъществените фактори и т.н. – една съществена черта в творческата работа на всеки физик и инженер.

Коментари. Разгледаните примери показват колко разнообразни възможности може да разкрие решението на една обикновена задача. Далеч не е необходимо в индивидуалната работа с учениците учителят да използва всички от тук приведените или споменати – по своя преценка той може да се спре само на някои от тях. Една възможност е да се разгледа само „физическият извод” на формулата за сума на безкрайна геометрична прогресия. Друга възможност е да се разгледа само задачата:

Два платнохода К' и К” плават един срещу друг с една и съща постоянна скорост съответно v' = 10 m/s. *В момент, когато разстоянието между тях е* s_0 = 9 km, *от К' към К” със скорост* v = 20 m/s *полита гълъб*[7]. *След като достигне К”, гълъбът полита със същата скорост обратно, след срещата с К'отново лети в първоначалната посока и т.н., оставайки между корабите. Ако размерите на гълъба са от порядъка на* d = 30 cm, *оценете колко пъти гълъбът ще срещне К' до срещата на корабите.*

Във всички случаи решенията на тези примерни задачи съдържат много допирни точки с обучението по математика, което ги прави особено удобни за осъществяване на съответните междупредметни връзки.

В заключение ще подчертаем още веднъж написаното в началото: всички направени разглеждания **илюстрират ползите, които могат да се извлекат, ако не се задоволим с получаване на отговора на една задача и се постараем да разкрием какво още може да се направи след него**. В случая основна полза е заздравяване на междупредметната връзка с математиката.

[7] Ако желаете задачата ви да звучи по-съвременно, и в този случай вместо за гълъб може да говорите за дрон.