Не се задоволявайте с получаване на отговора на задачите!
(в помощ на учители, работещи индивидуално с ученици)

В училищната практика обикновено приключваме решението на една физична задача с получаване на отговора – най-често някаква формула за, или – стойността на търсената величина/величини. Така, разбира се, постигаме някои основни цели на обучението като затвърдяване на знанията, придобиване на основни умения за прилагането им и др.п. Ако обаче не се задоволим с това и продължим работата по задачата и след получаване на отговора, това може да обогати кръга на постижимите цели с други, като засилване на интереса към физиката, развиване на физическото мислене, запознаване с методи на науката и т.н. Тъй като силно ограниченото учебно време обикновено не позволява това да се прави в класните форми на работа, като единствена възможност остават извънкласните – например индивидуалната работа с ученици, имащи изявени наклонности към природните науки. Такива ученици обикновено има във всяка паралелка (и нерядко – повече от един). По-долу тази идея се развива на основата на пример, от който се вижда как, тръгвайки от една относително проста задача, ситуацията може да се усложни и да се получат неочаквани и интересни резултати.

В много кинематични задачи за едномерни равномерни движения се разглеждат няколко тела, които се настигат, задминават, разминават и т.н. Тук започваме с една от популярните задачи от този тип, която по сборниците се среща в различни варианти, и която в случая ни интересува както с възможностите за търсене на решението чрез графичния метод, така и с резултата от аналитичното решение, който по-нататък използваме за решаване на друга, по-сложна задача[1].

Задача 1. Два платнохода *K’* и *K”* плават един срещу друг с постоянни скорости с големина *v’* и *v”*. В момента, когато разстоянието между корабите е s_0, с една и съща постоянна скорост с големина *v* от всеки кораб към насрещния полита гълъб (*Г’* и *Г”*) с писмо. След като доставят писмата, незабавно и със същата скорост гълъбите се връщат на своя кораб. Кой гълъб се връща пръв[2]?

Анализ. От условието на задачата се подразбира, че скоростта на гълъбите не зависи от скоростта на корабите, т.е. това не е задача, която изисква познаване на закона за събиране на скорости. (Във всички случаи като отправно тяло е избрана водната повърхност.)

Тъй като в решението се използват твърде много величини, още в началото уточняваме означенията: величините, отнасящи се до корабите или гълъбите различаваме по наличието или по липсата на горен индекс (*’*) и (*”*); с долен индекс 0, 1, 2, 3 ... номерираме точките и моментите време, в които се намира някой от корабите или от гълъбите; с два долни индекса – напр. „12” – прехода от точката с индекс „1” до точката с индекс „2” ; с „21” – обратния преход и т.н.

В тривиалния случай *v*" = *v*’ (еднакви скорости на корабите) отговорът на задачата е очевиден – едва ли има смисъл да се привеждат аргументи в полза на твърдението, че гълъбите ще са върнат на своите кораби едновременно. Основание за подобно твърдение е пълната **симетрия** на ситуацията: корабите плават един срещу

[1] Много задачи допускат решение чрез различни разсъждения. Изборът на типа разсъждения е субективен и зависи не само от задачата, но и начина на мислене на този, който я решава. За решаване на **тази** задача сме направили избор, който на нас ни се струва най-разбираем. Със сигурност ще бъде и интересно, и полезно, ако други читатели предложат различни от тук използваните разсъждения.

[2] Нищо в решението и в резултата няма да се промени, ако условието се преформулира така, че в него участва един гълъб, който излита и се връща веднъж от по-бързия и втори път – от по-бавния кораб. Тогава въпросът ще бъде в кой случай ще му бъде необходимо по-кратко време, за да изпълни мисията си.

друг с еднакви скорости, гълъбите излитат едновременно и през цялото време летят между тях с еднакви скорости... Дори за човек, незапознат със законите за движение, едва ли има смисъл да се обяснява какво в случая означава **симетрия**.

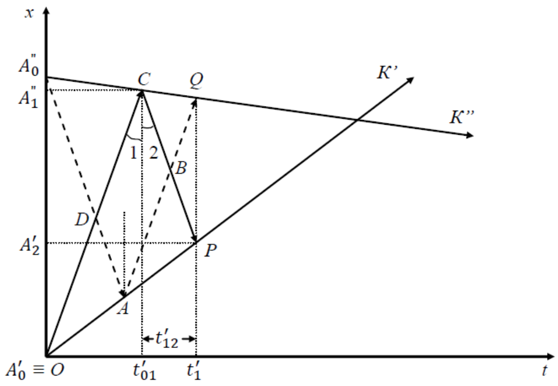
От тези съображения интересен е само случаят, когато скоростите на корабите са различни. За конкретност ще смятаме, че *К'* е по-бърз от *К"*, т.е.:

(1) $$v'' < v' < v.$$

(Очевидно задачата има смисъл само ако скоростта v на гълъбите е по-голяма от скоростта на всеки от корабите – в противен случай ще настъпи момент, в който поне един от гълъбите ще се намира извън отсечката, свързваща корабите и задачата става безсмислена.)

Може да се предположи, че щом летят с еднакви скорости, въпреки различните скорости на корабите, гълъбите ще приключат мисиите си отново едновременно. При по-подробно разглеждане на движенията обаче това предположение поражда съмнения. Наистина, поради това, че в началото гълъбът *Г"* лети към по-бързия кораб *К'* (вж. (1)), разстоянието, което трябва да преодолее през първата част на полета си, намалява по-бързо отколкото разстоянието, което трябва да преодолее *Г'*. Следователно писмото за *К'* със сигурност ще се получи преди писмото за *К"*. При обратния полет обаче *Г"* лети към по-бавния кораб *К"*, т.е. разстоянието до целта му сега намалява по-бавно, отколкото намалява разстоянието, преодолявано от *Г'*. Тъй като разстоянията, които трябва да преодолеят гълъбите на връщане са по-малки от тези на отиване, не е ясно дали двете противоположни тенденции се компенсират.

Графично решение. На фиг. 1 са показани графики на движенията на корабите и на гълъбите.



Фиг. 1.

Във всеки момент t положенията на телата се определят от тяхната координата x, отчитана от началното положение на *К'*. Началните положения на корабите са означени съответно с т. A_0' и т. A_0''.

Тъй като движенията са равномерни, четирите зависимости на x от t са линейни и затова графиките им – праволинейни. Колкото по-голяма е скоростта на движение, толкова по-стръмна е съответната права. (Когато тялото се движи от *К"* към *К'*, правата сключва с ординатата ъгъл, по-голям от 90°.)

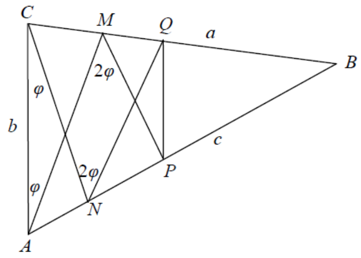
На фиг. 1 правата $A_0'K'$ съответства на движението на *К'*, правата $A_0''K''$– на движението на *К"*, а начупената линия $A_0'CP$ – на движението на гълъба *Г'*. От последната се вижда, че тръгвайки от т. O, в момента t_{01}' гълъбът пресреща кораба *К"* в т. C, след което в момента t_1' се връща на *К'* в т. P. Тъй като в двете посоки големината на скоростта му е една и съща, двата ъгъла, означени с „1" и „2" са равни.

На същата фиг. 1 щрихованата начупена линия OCP съответства на движението на гълъба *Г"*, който в т. A пресреща *К'*, след което в т. Q се връща на *К"*. Тъй като и *Г"* лети със скорост v, отсечките $A_0''A$ и CP са успоредни, както са успоредни $A_0'C$ и AQ.

От чертежа се **вижда**, че т. P и т. Q лежат на вертикална права, т.е. като че ли наистина двата гълъба се връщат на своите кораби едновременно в момента t_1'. Фактът обаче, че правата през т. P и т. Q е вертикална подлежи на доказване, защото от това, че нещо „се вижда” не следва, че то е вярно – възможно е, първо, чертежът ни да не е точен и, второ, при друго съотношение между скоростите v', $v"$ и v, т.е. при друг наклон на правите, отсечката PQ да не е вертикалната. Затова, за да бъде задачата наистина решена графично, е необходимо да се използват знания и уменият получени в обучението по геометрия.

В един сборник със задачи по геометрия условието на съответната задача би изглеждало примерно по следния начин:

Нека φ е произволен остър ъгъл, по-малък от всеки от ъглите ACB и CAB на остроъгълния триъгълник ABC (фиг.2). Върху страните a и c на триъгълника точките M, Q и N, P са подбрани така, че ъглите ACN и CAM са равни на φ, а ъглите CNQ и AMP – на 2φ. Да се докаже, че отсечките AC и PQ са успоредни.

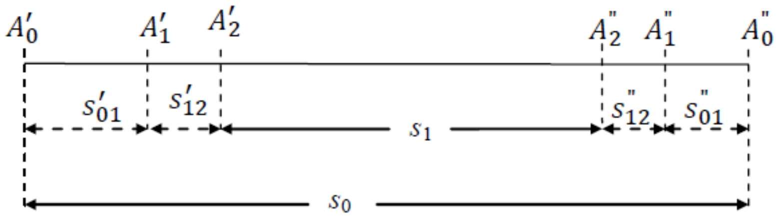


Фиг. 2.

За провеждане на доказателството са достатъчни знанията по геометрия, получавани понастоящем по математика в 8. клас. Връзката между геометричната и физичната задачи става очевидна, ако някои от означенията на фиг. 2 се сменят с използваните на фиг. 1 както следва: $A \rightarrow A_0'$, $C \rightarrow A_0"$, $N \rightarrow A$ и $M \rightarrow C$.

Тъкмо тази простота на графичния метод в додигиталната ера обуславя широкото му приложение за решаване на транспортни задачи (съставяне на разписания на влакове, автобуси и т.н.).

Аналитично решение. За да решим задачата аналитично, първо пресмятаме времето t', за което се справя със задачата си гълъбът $Г'$. То е сбор от времето t_{01}' за прелитане от т. A_0' до срещата с $K"$ в т. $A_1"$, и времето t_{12}' за връщането му от т. $A_1"$ в т. A_2', до която е достигнал K' (фиг. 3).



Фиг. 3.

За времето t_{01}' гълъбът $Г'$ прелита път vt_{01}', докато за същото време $K"$ се е преместил от т. $A_0"$ до т. $A_1"$, изминавайки път $s_{01}" = v"t_{01}'$. Сборът от тези пътища е равен на началното разстояние между корабите, т.е.:

(2) $$s_0 = vt_{01}' + v"t_{01}'.$$

Оттук намираме, че $Г'$ достига $K"$ за време:

(3) $$t_{01}' = \frac{s_0}{v+v"}.$$

В момента, когато $Г'$ достига $K"$, първият кораб, K', е скъсил разстоянието между корабите с $s_{01}' = v't_{01}' = \frac{v'}{v+v"}s_0$. Както отбелязахме по-горе, за същото време $K"$

е скъсил това разстояние с $s_{01}^{"} = v^{"}t_{01}' = \frac{v^{"}}{v+v^{"}}s_0$. Следователно в момента, когато гълъбът *Г'* започва обратния полет ситуацията е като началната, но разстоянието между корабите вече не е s_0, а:

(4) $$s_0' = s_0 - s_{01}' - s_{01}^{"} = \frac{v-v'}{v+v^{"}}s_0.$$

Това твърдение позволява да запишем изрази за времето t_{12}', необходимо за връщане на *Г'* върху *К'*, и за разстоянието s_1 между корабите в момента на завръщане, като във формули (3) и (4) просто разменим местата на v' и v", а s_0 заменим с s_1. Така получаваме:

(5) $$t_{12}' = \frac{s_0'}{v+v'} = \frac{v-v'}{(v+v')(v+v^{"})}s_0$$

(6) $$s_1 = \frac{v-v^{"}}{v+v'}s_0' = \frac{(v-v')(v-v^{"})}{(v+v')(v+v^{"})}s_0.$$

Общото време t', необходимо на *Г'* за отиване до *К"* и връщане върху *К'* е сума от t_{01}' и t_{12}'. Така с помощта на (3) и (5) получаваме:

(7) $$t' = \frac{2v}{(v+v')(v+v^{"})}s_0.$$

Фактът, че полученият израз за t' е **симетричен**[3] по отношение на размяната на скоростите *v'* и *v"* гарантира, че същият израз бихме получили и ако пресмятаме времетраенето на полета на гълъба *Г"*. По такъв начин и аналитичното решение потвърждава извода, направен с помощта на графичния метод[4].

С оглед нуждите на решението на следващата задача, ще пресметнем и общия път, изминат от гълъба *Г'* до завръщането му на кораба *К'*. Тъй като той лети със скорост v, този път ще се описва с формулата:

(8) $$l = vt' = \frac{2v^2}{(v+v')(v+v^{"})}s_0,$$

която, разбира се, също е симетрична по отношение на *v'* и *v"*.

По същество тази първа задача ни бе необходима само заради резултатите, съдържащи се във формули (6), (7) и (8). Следващата задача е подобна, като за разлика от първата в нея гълъбът е само един, но лети между корабите многократно.

Какви възможности за коментар и развитие на ситуацията предлага решената задача? Преди всичко е полезно да се провери какъв вид има фиг. 1 в следните два частни случая: споменатия в началото случай, в който v" = v', а след това – случая, в който един от корабите е неподвижен (v" = 0).

След това разглежданията може да се разширят, като се изследва случаят когато корабите не се срещат, а се настигат (при досегашните предположения за съотношенията (1) между големините на трите скорости) т.е. дали и в този случай времето за отиване е връщане на един гълъб не зависи от това, от кой кораб излита.

Накрая може да се разгледа най-общия случай, който вече е на студентско равнище, защото за решаване на въпроса за съотношението между двете времена изисква познания на векторната алгебра, които се получават в курса по математични методи на физиката. Това е случаят, в който движенията не са в двете посоки на една права, а, оставайки праволинейни, са в равнината на морската повърхност. С други думи скоростите на корабите и гълъбите вече не са колинеарни, но са компланарни.

---

[3] В този пункт на аргументацията за втори път използваме термина *симетрия*. Случаят може де се използва като пример и повод за коментар за ролята на симетриите във физиката.

[4] В първата бележка под линия отбелязахме, че често до отговора на една физична задача може да се стигне чрез различни разсъждения. В случая решихме задачата при предположение, че знаем само закона за пътя. Решете я при положение, че знаете и за относителността на движенията, т.е. – за връзката между скоростта на **едно** тяло спрямо **две** отправни системи. Кое решение изглежда по-разбираемо?.

Тогава, като смятаме, че координатната равнина (x, O, y) съвпада с водната повърхност, условието на задачата би изглеждало по следния начин:

Два кораба плават със скорости $\vec{v}' = \text{const}$ и $\vec{v}'' = \text{const}$, *като радиус-векторите им в момент t са съответно известни функции на времето* $\vec{r}'(t)$ и $\vec{r}''(t)$. *В един и същ момент от всеки кораб излита гълъб, който достига другия и се връща обратно. Големините на скоростите на гълъбите са равни (т.е.* $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v = \text{const}$*). Какво е съотношението между времената, необходими на гълъбите за извършване на полетите.*

Тъй като действието се развива в една равнина, всеки три вектора, подбрани измежду $\left(\vec{r}'(0) - \vec{r}''(0)\right), \vec{v}', \vec{v}'', \vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ трябва да бъдат компланарни, т.е. смесеното им произведение да бъде нула (например $(\vec{v}', \vec{v}'', \vec{v}_1) = 0$) и т.н.

Този случай обаче е по-сложен и поради това, че съществуват две възможни. Първата е когато между корабите съществува пряка видимост, т.е. разстоянието между тях не надминава няколко километра. Тогава във всеки момент всеки гълъб вижда и лети към своята цел, а тъй като целта се движи, посоката на скоростта на гълъба трябва да се променя по подходящ, но неизвестен начин (т.е. $\vec{v}_1 = \vec{v}_1(t)$ и $\vec{v}_2 = \vec{v}_2(t)$). Предполагам, че такава задача е твърде сложна дори и за студентско равнище.

Втората възможност е когато разстоянието между корабите е голямо и пряка видимост няма. В определен смисъл случаят е по-прост, но сега екипажът на единия кораб, като използва например спътникови данни от GPS–системата за положението и движението на другия кораб, трябва предварително да определи в коя посока трябва да лети праволинейно гълъбът, за да попадне на другия кораб[5], като същевременно на другия кораб трябва да са пресметнали посоката на скоростта при обратния полет.

При въпросната втора възможност също има интересни частни случаи – например, когато скоростите на двата кораба са колинеарни ($\vec{v}' \text{x}\, \vec{v}'' = 0$), или когато са взаимно перпендикулярни ($\left((\vec{v}' . \vec{v}'') = 0\right)$.

Интермедия[6]. Един от важните проблеми във висшата математика е проблемът за сумиране на безкрайни редове. А един от най-често срещаните частни случаи на този проблем е проблемът за сумата от членовете на безкрайна геометрична прогресия:

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

Неизкушеният в математиката би написал:

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 = 1 + q(1 + q + q^2 + \cdots) = 1 + qS,$$

а решението на това просто уравнение за S е:

$$S = \frac{1}{1-q}, \text{ т.е. } 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q}.$$

Проблемът обаче не е толкова елементарен, защото някои операции, допустими при суми с краен брой събираеми (като ваденето на общ множител пред скоби, например), за безкрайните суми не винаги са позволени. Тази причината, поради която „изводът” на последната формула е некоректен. Това се вижда, ако приложим формулата например за q = 1/2 и за q = 2. В първия случай получаваме смислен резултат – S = 2, но във втория формулата води до абсурд, до S = –1 – явно сумата от положителни числа няма как да бъде равна на отрицателно число. И работата на математиците е да докажат съществуват ли условия, при които формулата може да се използва и ако съществуват –

[5] В зенитната артилерия това се нарича *задача на срещата* и обикновено се решава с помощта на компютри. Отделен въпрос е дали може да се застави един гълъб да лети по зададен азимут. В този смисъл е по-добре да се говори не за гълъби, а например за дронове – дронът лесно се програмира да лети в определена посока.

[6] За позабравилите някои неща от ученото по висша математика.

кои са те. А това вече не е елементарно, свързано е с въпросите за граници на безкрайни числови редици, критерии за сходимост на редове и т.н..

Ние обаче ще подходим към проблема физически, като се опрем на една ясна физическа ситуация, описана в условието на следващата задача.

Задача 2. Два платнохода *К'* и *К"* плават един срещу друг с постоянни скорости съответно v' и v''. В момента, когато разстоянието между корабите е s_0, от *К'* към *К"* със скорост v полита гълъб. След като достигне *К"*, гълъбът полита със същата скорост обратно, среща К' и отново лети в първоначалната посока и т.н., като винаги остава върху отсечката, свързваща корабите. Какъв път L ще измине гълъбът до срещата на корабите?

Анализ. Както предишната, така и тази задача има смисъл, само ако са изпълнени неравенствата (1)[7].

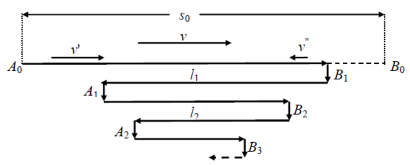
Задачата е интересна поради факта, че от математична гледна точка изглежда сложна. Това обаче е вярно само от пръв поглед, т.е. ако търсим отговора чрез сумиране на постоянно скъсяващите се разстояния, изминати от гълъба между последователните срещи с корабите. Ако обаче съобразим, че времето T до срещата на корабите въобще не зависи от гълъба, задачата се решава почти на ум. Наистина, в момента на срещата сумата от пътищата, изминати от корабите е s_0 ($v'T + v''T = s_0$), така че срещата се осъществява след време $T = \frac{s_0}{v'+v''}$, а за него гълъбът, разбира се, прелита разстояние:

$$L = \frac{v}{v'+v''} s_0 \,. \tag{9}$$

С други думи, за решаване на задачата е достатъчен само законът за пътя при равномерно движение (и ... известна доза съобразителност).

Ние обаче ще решим задачата и по по-сложния начин, защото той води до някои допълнителни резултати. Както и в първата задача, в решението ще използваме само закона за пътя.

Аналитично решение. На фиг. 4 е показано как изглежда пътят на гълъба:



Фиг. 4.

в началния момент той и корабът *К'* тръгват от т. A_0, като корабът *К"* се намира от тях на разстояние s_0. Летейки със скорост v, гълъбът пресреща *К"* в т. B_1, връща се към *К'* и го среща в т. A_1, като общият изминат път $A_0B_1A_1$ на фиг.4 е означен с l_1.

По-нататък гълъбът извършва същото по характер движение, но вече между точките A_1, B_2 и A_2, като общият изминат път е l_2 и т.н..

По такъв начин полета на гълъба от началния момент до срещата на корабите се разделя на последователни подобни един на друг етапи със скъсяваща се дължина. Продължителността t_n, дължината l_n на изминатия от гълъба път по време на n-тия етап, както и разстоянието s_n между корабите в края на този етап се определят от формули, които са следствия от (6), (7) и (8). Преди да ги запишем обаче, с цел опростяване на изразите, първо ще въведем два безразмерни параметъра ξ и η, които са свързани със скоростите на гълъба и корабите чрез формулите:

---

[7] Обикновено в сборниците, които включват тази задача, се говори не за гълъб и кораби, а за муха, летяща между два насрещно движещи се влака. Разбира се, като по-екзотичен, този случай е и по-интересен. Той обаче е по-нереален, защото, първо, скоростта на мухата трудно би удовлетворила неравенствата (1) и, второ, гълъбът е не само по-бърз, но и по-издръжлив на летене от мухата.

(10) $\xi = \frac{2v^2}{(v+v')(v+v")}$ и $\eta = \frac{(v-v')(v-v")}{(v+v')(v+v")}$.

С тяхна помощ формулите (7) – за времето t_1, (8) – за изминатия от гълъба път l_1 и (6) – за разстоянието s_1 между корабите в момента на първото завръщане на гълъба върху *K'* се записват във вида:

(11) $t_1 = \xi \frac{s_0}{v}$, $l_1 = \xi s_0$ и $s_1 = \eta s_0$.

Като имаме предвид казаното по-горе за подобието на етапите и формулите (11), изразът за пътя l_2, който гълъбът ще прелети през втория етап (повторно пресрещане на *K"* и завръщане на *K'*) и за разстоянието s_2 между корабите в момента на второто завръщане, ще имат вид съответно:

(12) $l_2 = \xi s_1 = \xi\eta s_0$ и $s_2 = \eta s_1 = \eta^2 s_0$.

По силата на същата логика за пътят l_3 и разстоянието s_3, прелетян при третото завръщане на *K'* ще бъдат:

$$l_3 = \xi s_2 = \xi\eta^2 s_0 \quad \text{и} \quad s_3 = \eta s_2 = \eta^3 s_0\,,$$

при четвъртото – $l_4 = \xi s_3 = \xi\eta^2 s_0$ и $s_4 = \eta s_3 = \xi\eta^2 s_0(1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \cdots)$ и т.н..

Тези разсъждения, заедно с получените формули водят до извода, че общият изминат от гълъба път L е:

(13) $L = l_1 + l_2 + l_3 + \cdots = \xi s_0(1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \cdots)$.

И тук попадаме в затруднение: по математика не се изучават суми на безкрайни редове. Който владее елементи от висшата математика знае, че формулата за сума на безкрайна геометрична прогресия е валидна при условие, че $\eta < 1$, а неравенствата (1) и формула (10) гарантират неговото изпълнение. Трудността произтича от нежеланието ни да се позоваваме на висшата математика. Тя може да се преодолее, като използваме това, което знаем от физиката. А в случая ние знаем отговора за L – той се съдържа във формула (9) и това е достатъчно: приравняваме десните страни на (9) и (13), и като отчетем съдържащото се в (10) определение за ξ, получаваме:

$$1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \cdots = \frac{(v+v')(v+v")}{2v(v'+v")}.$$

За да стигнем до желания резултат, остава да изразим дясната страна на полученото равенство чрез η. За целта е необходимо да довършим следната верижка от преобразования[8]:

$$\frac{(v+v')(v+v")}{2v(v'+v")} = \frac{1}{\frac{2v(v'+v")}{(v+v')(v+v")}} = \frac{1}{1+\frac{2v(v'+v")}{(v+v')(v+v")}-1} = \cdots = \frac{1}{1-\eta}.$$

По този „физичен" начин неочаквано получихме още един[9] извод на формулата за сумата на безкрайна геометрична прогресия:

$$1 + \eta + \eta^2 + \eta^3 + \cdots = \frac{1}{1-\eta},$$

за който вече сме сигурни, че е валиден поне за случая $\eta < 1$.

Да сумираме: с какво физиката помогна да избегнем математическия проблем за доказване на сходимостта на този безкраен ред? Отговорът е: с това, че от физични съображения знаем, че когато скоростта на гълъба е по-голяма от скоростта на корабите

[8] Тук е слабият пункт в разсъжденията, защото той не подлежи на алгоритмизация, т.е. неизбежно възниква въпросът „Как се досетихте?", въпрос, който навремето студентите задаваха на проф. Тагамлицки, когато в някое доказателство правеше непредвидима стъпка. В такъв случай професорът винаги отговаряше с характерната си усмивка и думите: „Умен човек съм, досещам се!". В нашия случай, разбира се, не става дума за качества на ума, а за това, че просто знаем отговора предварително.

[9] Ако в някоя търсачка в интернет напишете *сума на безкрайна геометрична прогресия*, ще излезят толкова много резултати, че броят им може да съперничи на броя на доказателствата на теоремата на Питагор.

(условие, което осигурява $\eta < 1$), при описаното поведение на гълъба той във всеки момент ще се намира между двата кораба.

И по-нататък. Решаването на задача 2 по по-сложния начин дава много повече възможности, отколкото получаването на формула за сумата на безкрайна геометрична прогресия. Междинните формули, до които стигнахме позволяват да търсим отговори и на други въпроси, свързани с движението на гълъба. Например, като използваме вече доказания резултат за сума на безкрайна геометрична прогресия и аналогично на начина, по който от (11) получихме формули за l_1, l_2, l_3 ... запишем формули за времената t_1, t_2, t_3… за прелитане на последователните етапи, можем да пресметнем сумата $t_1 + t_2 + t_3 + \ldots$ и да се убедим, че тя наистина е $T = \frac{s_0}{v' + v''}$, както елементарно съобразихме в анализа на задачата.

На второ място получените формули позволяват да поставим въпроса за броя на срещите на гълъба с корабите. Строго погледнато, ако разглеждаме гълъба като материална точка, този брой е безкраен[10]. С цел да направим ситуацията по-реалистична, ще отчетем, че с разперени крила гълъбът има линейни размери от порядъка на, примерно, 30 cm. Ясно е, че когато разстоянието между корабите стане от порядъка на 30 cm, гълъбът вече не може да маневрира между тях и затова приемаме, че това е и моментът на срещата. И така, стигаме до третата задача, в която вече освен скоростите и началното разстояние, е зададен още един параметър с размерност на разстояние – размерът на гълъба.

Задача 3. Два платнохода *K’* и *K”* плават един срещу друг с постоянни скорости съответно v' и v''. В момента, когато разстоянието между тях е s_0, от *K’* към *K”* със скорост v полита гълъб. След като достигне *K”*, гълъбът полита със същата скорост обратно, след срещата с *K’*отново лети в първоначалната посока и т.н., оставайки винаги между корабите. Ако размерите на гълъба са от порядъка на d, оценете колко пъти (N) гълъбът ще срещне *K’* до срещата между корабите.

Решение. Решението се дава от вече получените формули (11), (12) и това, което се получава като продължим разсъжденията и по-нататък. От тях следва, че в момента на N-тото си завръщане на кораба *K’* разстоянието между корабите е:

(14) $$s_N = \eta^N s_0.$$

Като приравним този израз към d и решим полученото уравнение спрямо N, за броя на връщанията на гълъба на кораба *K’* получаваме израза:

(15) $$N = \frac{\ln\frac{d}{s_0}}{\ln\eta} = \frac{\ln\frac{d}{s_0}}{\ln\frac{(v-v')(v-v'')}{(v+v')(v+v'')}}.$$

Да приложим тази формула за една конкретна ситуация, за да преценим доколко е реалистичен резултатът, получен от нея. Нека корабите се движат с еднаква скорост $v' = v'' = 10$ m/s, гълъбът лети с два пъти по-голяма скорост, т.е. $v = 20$ m/s, $d = 0{,}3$ m. Ако началното разстояние между корабите е $s_0 = 9$ km, според формула (16) $N \approx 4{,}69$, т.е. в този случай гълъбът ще срещне кораба *K’* не повече от пет пъти – едно изненадващо малко число, но като резултат – напълно разумно.

Да разгледаме и случая на „гълъб–материална точка”, т.е. случая $d = 0$. Както трябва да се очаква, в този случай от (16) следва $N \to \infty$. Този резултат е удивителен в едно отношение: за времето, за което корабите се сближават от 9 km до 30 cm, гълъбът прави само 4 – 5 „курса” между тях, а за останалите по-малко от 0,2 s (толкова бързо

[10] В известен смисъл ситуацията е като в известната апория на Зенон: Бързоногият Ахил никога не може да настигне костенурката, която има 100 метра аванс, защото докато той пробяга 50 m, тя ще измине 10 cm, докато той пробяга следващите 25 m, тя ще се отдалечи с още 5 cm и т.н. – до безкрайност.

разстоянието между корабите намалява с 30 cm) трябва да направи безкраен брой прелитания[11]!

Както предишните, и тази задача допуска продължаване на разсъжденията след намиране на отговора. За да направим ситуацията още по-реалистична, може да поставим въпроса доколко отговорът зависи от избора на критерий за определяне край на полета на гълъба. В случая като критерий избрахме размерите на гълъба, т.е. решихме, че полетът спира, когато разстоянието между корабите стане равно на d. А, ако тези размери са не 30 cm, а с 10 % по-малки – напр. 27 cm? Пресметнете по формула (15) новата стойност на N – резултатът е $N' \approx 4{,}74$, т.е. разликата от предишния резултат е само малко повече от 10 %.

Следващият въпрос е може ли да изберем друг критерий? Отговорът е положителен: да приближим ситуацията още малко към действителността: да отчетем, че достигайки един от корабите, гълъбът не може мигновено да смени посоката на коростта си. Да предположим, че той кацва на кораба и полита обратно след престой от една секунда. Тогава за момент на среща на корабите може да изберем момента, в който те са един срещу друг на разстоянието, което изминават за 1 s, т.е. на $d = 20$ m. Да пресметнем отново по формула (15) колко курса е извършил гълъбът, докато корабите се сближат на 20 m. Резултатът е $N \approx 2{,}78$, т.е. сега гълъбът среща *К'* само два пъти. Ако ли пък сега той „почива" върху кораба с 10 % по-малко, т.е. само 0,9 s, резултатът ще бъде $N \approx 2{,}82$ – около 1,5% по-малко предишния случай. С други думи резултатът за N при втория критерий е по-нечувствителен към промяна на избраната величина (време за престой), отколкото в първия, когато избрахме разстоянието.

В това отношение, разбира се, нещата могат да се усложняват, както се казва, до безкрай. По-горе например ние не отчитаме, че гълъбът престоява на корабите по 1 s при всяко, а не само при последното. Освен това не отчитаме и факта, и при кацане в някакъв кратък интервал време скоростта на гълъба не е постоянна – тя или нараства от 0 до 20 m/s, или намалява от 20 m/s и т.н., и т.н.

Чрез подобни разглеждания ние можем да насочваме учениците да търсят и оценяват влиянието на различни фактори върху интересуващия ни резултат, да отсяват съществените от несъществените и т.н. – една съществена черта в творческата работа на всеки физик и инженер.

Коментари. Разгледаните примери показват колко разнообразни възможности може да разкрие решението на една обикновена задача. Далеч не е необходимо в индивидуалната работа с учениците учителят да използва всички от тук приведените – по своя преценка той може да се спре само на някои от тях. Една възможност е например да се разгледа само първата задача, като ударението падне върху графичния метод и приложението му в по-сложните случаи. Друга възможност е да се разгледа само „физическият" извод на формулата за сума на безкрайна геометрична прогресия. Или, накрая, на основата на третата задача да се формулира самостоятелно само задачата:

Два платнохода К' и К" плават един срещу друг с една и съща постоянна скорост съответно v' = 10 m/s. *В момент, когато разстоянието между тях е* s_0 = 9 km, *от К' към К" със скорост* v = 20 m/s *полита гълъб*[12]. *След като достигне К",*

[11] Последното твърдение се основава на равенсвото $\infty - 5 = \infty$, верността на което математиците обикновено илюстрират със следния пример. Ако искате да се настаните в хотел, в който всички стаи са заети, няма да ви приемат в хотела. Ако обаче хотелът е с безкраен брой стаи, въпреки че няма свободни, настаняването ви е сигурно: достатъчно е обитателят на първата стая се прехвърля във втората, обитателят на втората – в третата и т.н., всички стари обитатели преминават в стая, чиито номар е с единица по-голям и ... тъй като $\infty + 1 = \infty$, първата стая остава свободна за вас!

[12] Ако желаете задачата ви да звучи по-съвременно, и в този случай вместо за гълъб може да говорите за дрон.

гълъбът полита със същата скорост обратно, след срещата с К'отново лети в първоначалната посока и т.н., оставайки винаги между корабите. Ако размерите на гълъба са от порядъка на $d = 30$ cm*, оценете колко пъти гълъбът ще срещне К' до срещата на корабите.*

Очевидно е, че за решението на тази задача не е необходимо да се говори за условия на сходимост на безкрайни редове и др.п. Разглеждането обаче може да се задълбочи в друга посока. Наистина, формула (14) написахме по аналогия с (11) и (12), но според математиката това не е достатъчно[13]. За да сме сигурни във валидността на (14), т.е. – за да можем да се позовем на метода на пълната математическа индукция, трябва да докажем още, че ако равенство (14) е вярно за N, то е вярно и за $N + 1$, което в случая не е трудно. (Същото важи и за формула (13).)

Във всички случаи решенията на примерните задачи съдържат много допирни точки с обучението по математика, което ги прави особено удобни за осъществяване на съответните междупредметни връзки.

В заключение ще подчертаем още веднъж написаното в началото: всички направени разглеждания илюстрират ползите, които могат да се извлекат, ако не се задоволим с получаване на отговора на една задача и се постараем да разкрием какво още може да се направи след него. В случая основна полза е заздравяване на междупредметната връзка с математиката.

[13] Като доказателство за тази необходимост обикновено се използва примерът, който дължим на Ойлер: твърдението, че числото $n^2 + n + 41$ е просто число е вярно за всяко цяло $n < 40$, но не и за $n = 40$.