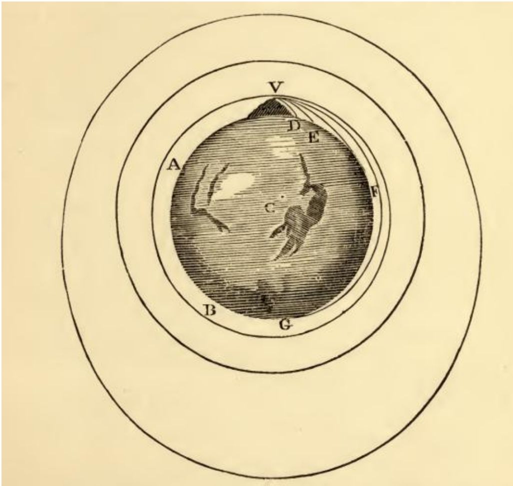
**Вариации на тема от Нютоновите *Принципи...***

В края на някои издания на Нютоновата *Philosofiæ Naturalis Principia Mathematica* е поместена част, озаглавена *Системата на света*. В нея Нютон прилага изведените в първите три части закони и правила за обясняване на строежа и движенията на телата в Слънчевата система. Именно там е прочутата фиг. 1, възпроизвеждана в хиляди учебници по физика и астрономия по целия свят. (В случая фигурата е взета от първото американско издание[1] на *Принципите...*)




Фиг. 1.

С помощта на тази фигура Нютон обосновава възможността за движение по стабилна затворена орбита под влияние на гравитацията (при липса на съпротивление). Аргументацията е лесно разбираема: с колкото по-голяма скорост изстрелваме в хоризонтална посока снаряд от върха на една планина, толкова по-далече пада той върху земната повърхност. Според автора „*...ако скоростта се увеличава все повече и повече, тялото ще заобиколи Земята и ще се върне на планината, от която е изстреляно.*" Позовавайки се на закона за постоянство на площната скорост (доказан в *Принципите...*), той заключава, че и скоростта на снаряда след първата обиколка ще бъде равна на началната скорост, така че наистина кръговата орбита ще бъде стабилна. (Днес ние наричаме тази скорост първа космическа скорост.)

Въз основа на този разгледан от Нютон пример може да се формулират редица и количествени, и качествени задачи, за чието решаване са достатъчни само две твърдения:

– при движение на тяло под действие на гравитационна сила, насочена към неподвижен център, траекторията представлява конично сечение (елипса, парабола или хипербола), в един от фокусите на което се намира източникът на силата (фактически – първият от законите на Кеплер);

[1] Newton's Principia. The Mathematical Principles of Natural Philosophy, by Sir Isaac Newton; Translated into English by Andrew Motte. To which is added Newton's System of the World; First American Edition, New-York, Published by Daniel Adee, 45 Liberty Street, 1846.

- доказаният от Нютон факт, че въпреки крайните размери на Земята, извън нея гравитационната сила е същата, каквато би била ако цялата ѝ маса е съсредоточена в нейния център.

Първата задача е качествена и е пряко свързана с фиг. 1.

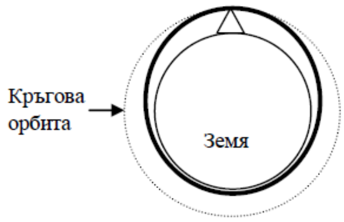
**Задача 1.** Къде ще падне снаряд, изстрелян със скорост, **малко** по-малка от първата космическа скорост?

**Решение.** Преди всичко в условието „*малко по-малка*" поражда въпроса: **колко малко**? На отговора по-нататък ще придадем и количествен характер, но засега ще се задоволим само с известна конкретизация, смятайки че началната скорост на снаряда е много малко по-малка от първата космическа скорост.

Интуитивният отговор на поставения въпрос е: снарядът ще падне на земята малко зад оръдието, от което е изстрелян. До него води следното привидно правилно разсъждение: от фигурата се вижда, че при малко по-голяма скорост снарядът отива малко по-далече. Логично е, че при малко по-малка скорост траекторията му ще бъде малко по-къса. Щом при първа космическа скорост прави пълна обиколка около Земята, при много малко по-малка скорост снарядът няма да опише пълна окръжност и трябва да падне някъде зад оръдието, без да го достигне.

Като логика това разсъждение е правилно, но като физика – не, защото не отчита, че според първия закон на Кеплер в този интервал от скорости **всяка** орбита е елипса (по-специално – окръжност), а ако снарядът падне зад оръдието, траекторията не може да се затвори. Наистина, при по-внимателно вглеждане във фиг. 1 се забелязва, че най-далечната точка, до която стига снаряд, е т. *G*, т.е. Нютон не показва нито един паднал на земята снаряд, който прави повече от половин обиколка на земното кълбо.

Истинският вид на траекторията на снаряд, изстрелян с много малко по-малка от първата космическа скорост, е показана на фиг. 2 – близка до окръжност елипса, изцяло обикаляща Земята и изцяло обхваната от кръговата орбита, отговаряща на първата космическа скорост.



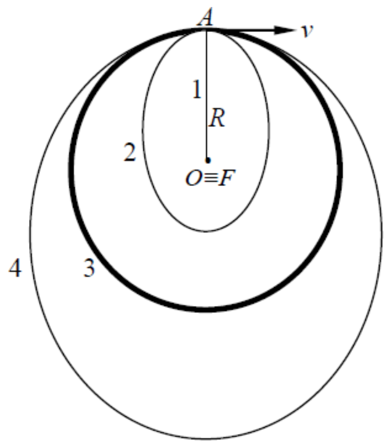

Фиг. 2.

И така, верният отговор на поставения в задача 1. въпрос е: Снаряд, изстрелян от върха на планина с начална скорост, малко по-малка от първата космическа скорост, изобщо не пада на земята, а, движейки се по елипса, попада в началната точка на движението. В този смисъл условието на задачата не е съвсем коректно, защото то подвежда с предположението, че снарядът **пада** на земята.

Задача 1. провокира разглеждане на случая, когато снарядът се изстрелва не от върха на планина, а от земната повърхност. Този случай може да се обедини под заглавието *Всичко или нищо*:

**Задача 2.** Оръдие изстрелва снаряди в хоризонтална посока от повърхността на Земята.  Покажете, че в зависимост от началната скорост снарядът или може да порази всяка, или не може да порази нито една земна цел. Земята е идеално кълбо, съпротивлението на въздуха се пренебрегва.

**Качествен анализ.** Първо разглеждаме следния абстрактен случай: в т. $O$ се намира тежка материална точка, а в т. $A$ на разстояние $R$ от нея – оръдие, което изстрелва снаряди перпендикулярно на отсечката $OA$ с различна по големина начална скорост $v$ (фиг. 3).




Фиг. 3.

Да проследим как се променя траекторията на снаряда в зависимост от $v$. Съгласно с първия закон на Кеплер траекторията е елипса, парабола или хипербола, един от фокусите $F$ на която е в неподвижния източник на гравитационната сила, в случая – в т. $O$. Тъй като по условие началната скорост е перпендикулярна на отсечката $OA$, тази отсечка задава и направлението на една от осите на траекторията, т.е. при всяка стойност на $v$ т. $A$ е връх на траекторията. Следователно *всички възможни елипси имат два общи фиксирани елемента*: *общ фокус* $F$ и *общ връх* $A$.

Проследяването започваме със случая на минималната начална скорост – когато снарядът е „изстрелян" с нулева скорост, т.е. $v = 0$. Очевидно в този случай той просто пада към гравитационния център и траекторията представлява самата отсечка $AO$ (на фиг. 3 тя е отбелязана с „1"). В духа на закона на Кеплер това означава, че при $v = 0$ траекторията е двойна отсечка, т.е. – безкрайно сплесната елипса (елипса с ексцентрицитет $\varepsilon = 1$) с голяма ос равна на $R$ и фокуси, съвпадащи с краищата на отсечката – т. $O$ и т. $A$.

Следващ е случаят $v \neq 0$, но когато скоростта не е много голяма (смисълът на последното условие ще се изясни по-късно – ще се окаже, че се отнася за скорости, не надминаващи първа космическа скорост). Изхождайки от елементарни съображения за непрекъснатост, можем да твърдим, че при малки скорости елипсата ще се отличава малко от двойната отсечка, като отново единият ѝ фокус е в т. $O$, а единият връх – в т. $A$. На фиг. 3 тази траектория е отбелязана с „2” и се вижда, че сега голямата ос е по-дълга от $R$, т.е. вторият връх на елипсата се е отдалечил от гравитационния център, а това означава, че и другият фокус (на фигурата той не е отбелязан), който преди беше в т. $A$, се е преместил от т. $A$ към т. $O$.

Ако началната скорост продължава да расте, „подвижният” фокус на елипсата продължава да се отдалечава от т. $A$ и да се приближава към фиксирания фокус, което означава, че ексцентрицитетът намалява, т.е. формата на елипсата все повече се различава от формата на двойна отсечка и все повече наподобява окръжност. Така, с увеличаване на началната скорост се достига скорост $v_0$, при която и „подвижният” фокус се оказва в т. $O$. Но елипса със съвпадащи фокуси представлява окръжност! Следователно при $v = v_0$ траекторията е окръжност (елипса с ексцентрицитетът $\varepsilon = 0$ и голяма ос $2R$). На фигурата този случай е отбелязан с „3”.

При още по-голяма начална скорост (т.е. при $v > v_0$), „подвижният” фокус продължава да се отдалечава от т. $A$, напуска отсечката $|AO|$, като се отдалечава и от източника на гравитационната сила. В тези случаи (на фигурата един от тях е отбелязан с „4”) голямата полуос на елипсата е по-голяма от $R$. При някаква достатъчно голяма скорост $v_1$ „подвижният” фокус отива в безкрайност, елипсата се „отваря” и се превръща в парабола. Ако началната скорост надмине и $v_1$, „подвижният” фокус на коничното сечение, оставайки върху правата, която съдържа отсечката $OA$, започва да се приближава от безрайност „отгоре” към т. $A$. В тези случаи вече траекторията представлява клонка от хипербола.

За по-нататъшните разглеждания е важен следният качествен резултат:

*увеличаването на началната скорост на снаряда води до увеличаване на голямата полуос на елипсата.*

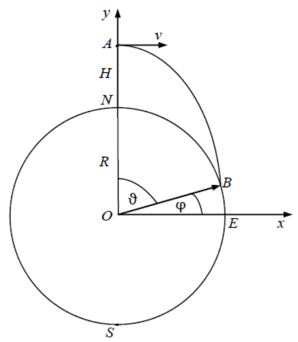
**Качествено решение.** Направеният анализ води пряко до решението на задачата. За целта е достатъчно да си представим, че на фиг. 1 в т. $O$ се намира центърът на Земята. Тогава окръжността с радиус $R$ е границата на кръг, представляващ напречно сечение на земното кълбо през центъра му. От фигурата се вижда, че всички снаряди, чиято начална скорост е по-малка от $v_0$, изобщо няма да може да се отдалечат от оръдието, а снарядите с по-голяма от $v_0$ начална скорост – изобщо няма да паднат на Земята.

Ако обаче снарядът е изстрелян с начална скорост точно $v_0$, той може да достигне всяка точка от окръжността с радиус $R$. При условие, че оръдието има възможност да се върти на 360º, оставайки в хоризонталната равнина, снарядът ще достигне всяка точка от земната повърхност. И за да порази цел, намираща се в тази точка, снарядът трябва само да бъде снабден с часовников механизъм, който да го взриви в момента на достигане на целта[2].

След тези качествени задачи може да се реши и следната количествена задача.

**Задача 3.** В т. $A$ на височина $H$ над Северния полюс $N$ на Земята се намира оръдие, което стреля в хоризонтална посока (фиг. 4). С каква начална скорост $v$ трябва да се изстреля снаряд, за да порази цел в т. $B$, имаща географска ширина $\varphi$?

[2] С подобни механизми са снабдени зенитните снаряди. В зенитната артилерия се разчита не на пряко попадение в целта (твърде малко вероятно е снарядът да удари самолета) – разчита се целта да бъде поразена от осколките на снаряда, при условие че той се взриви сам, но достатъчно близо до нея.




Фиг. 4.

**Решение.** В два частни случая отговорът се намира със средствата на елементарната физика:

– при φ = 90º, т.е., когато целта $B$ е на Северния полюс, снарядът я поразява, ако просто бъде оставен да пада свободно (бъде изстрелян с начална скорост $v = 0$);

– при φ = –90º, т.е., когато целта $B$ е върху Южния полюс $S$. В този случай началната скорост $v$ може да се намери с помощта на двата закона за запазване – закона за запазване на механичната енергия и закона за запазване на момента на импулса.

Ако означим с $m$ и $M$ масите съответно на снаряда и на Земята, а с – $G$ гравитационната константа, гравитационната потенциална енергия на снаряда на разстояние $r$ от центъра $O$ на Земята се описва с израза $-G\frac{mM}{r}$. Като вземем предвид, че разстоянието на т. $A$ до центъра на Земята е $R + H$, а целта в $S$ е на разстояние $R$ от т. $O$, законът за запазване на енергията осигурява равенството:

(1) $$\frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{R+H} = \frac{mv'^2}{2} - G\frac{mM}{R},$$

където с $v$’ е означена скоростта на снаряда в т. $S$.

Тъй като и в т. $A$, и в т. $S$ скоростта на снаряда е перпендикулярна на радиусвектора с начало в т. $O$, моментът на импулса в двете точки е съответно $mv(R + H)$ и $mv'R$. Законът за запазване момента на ипулса осигурява още едно равенство:

(2) $$mv(R + H) = mv'R,$$

което, решено съвместно с (1), дава възможност да се намери търсената скорост:

(3) $$v = \frac{v_0}{\sqrt{1+\frac{H}{2R}}}.$$

Тук

(4) $$v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R+H}}$$

е първата космическа скорост[3] за тяло, намиращо се на височина $H$ над земята.

[3] Напомняме, че първата космическа скорост $v_0$ е скоростта при движение по кръгова орбита и се получава от приравняване на гравитационната сила $G\frac{mM}{r^2}$ и центростремителната сила $\frac{mv_0^2}{r}$.

Формула (3) позволява да придадем точен смисъл на израза *малко по-малка скорост*, който използвахме в задача 1. Наистина, според нея всеки снаряд, чиято начална скорост $v$ лежи в интервала:

$$\frac{v_0}{\sqrt{1+\frac{H}{2R}}} < v < v_0,$$

няма да падне на Земята, а по елиптична траектория ще се върне в точката, от която е изстрелян.

В общия случай, когато целта $B$ се намира на произволна географска ширина $\varphi$ ($-90^\circ < \varphi < 90^\circ$), е удобно уравнението на елипсата да се запише в полярни координати с начало на координатната система в центъра $O$ на Земята и полярна ос, насочена към Северния полюс. В този случай полярният ъгъл (фиг. 4) е:

(5) $$\vartheta = 90^\circ - \varphi$$

и уравнението на траекторията има вида:

(6) $$\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\vartheta} = \frac{p}{1-\varepsilon\sin\varphi},$$

където $\rho$ е разстоянието между произволна точка от траекторията и координатното начало. (В знаменателя стои знак минус, защото полярната ос е насочена към по-далечния връх на елипсата – вж. задача 2.)

Тъй като целта се намира върху земната повърхност, то $\rho = R$ и търсената начална скорост трябва да се определи от уравнението:

(7) $$R(1 - \varepsilon\sin\varphi) = p.$$

Параметрите $p$ и $\varepsilon$ на елипсата се получават след решаване на задачата на Кеплер. Тъй като в интернет се намират множество решения, за $p$ и $\varepsilon$ използваме готови резултати. Подходящо е например решението в http://pskgu.ru/projects/pgu/storage/wt/wt031/wt031_03.pdf , тъй като е точно за разглеждания случай (начална скорост, перпендикулярна на радиус-вектора от гравитационния център към началната точка на движението). Според приведения там резултат:

(8) $$p = (R+H)\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \quad \text{и} \quad \varepsilon = 1 - \left(\frac{v}{v_0}\right)^2,$$

където, както по-горе, $v_0$ е първата космическа скорост, определена с формула (4).

Като заместим изразите за $p$ и $\varepsilon$ от (8) в (7), решим полученото уравнение спрямо $v$ и направим съответните опростяващи преобразувания, получаваме:

(9) $$v = \frac{v_0}{\sqrt{1+\frac{H}{2R\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)}}}.$$

Лесно се проверява, че както би трябвало да бъде, тази обща формула обхваща разгледаните в началото частни случаи: при $\varphi = 90^\circ$ знаменателят в (9) е безкрайно голям и получаваме $v = 0$, а при $\varphi = -90^\circ$ формула (9) преминава във формула (3). Същата формула (9) съдържа и резултата, получен в задача 2.: при $H = 0$ снарядът поразява всяка цел, ако началната му скорост е $v = v_0$.

От всички направени дотук разглеждания следва, че снарядът от оръдието на фиг. 4 може да порази всеки обект, лежащ на меридиана в източното полукълбо, но не може да порази нито един обект върху продължението на този меридиан в западното полукълбо (разбира се, ако оръдието не се завърти на 180º около вертикалната ос). Наистина, най-отдалеченият обект, който може да бъде поразен, лежи на южния полюс $S$ и се достига при начална скорост, определена от формула (3). По-нататъшно увеличаване на началната скорост не води до поразяване на цели в западното полукълбо, защото снарядът, движейки е по елиптична орбита, се връща в точката, от която е изстрелян, без да падне на земята.