# Две различни задачи с един и същ отговор – Ф

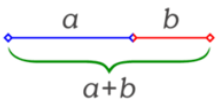
**Предварителни бележки.** На пръв поглед множеството на ирационалните числа, т.е. тези, които не могат да се представят като отношение на две цели числа, е устроено в съответствие с демократичните принципи: в определен смисъл всички негови членове са равноправни. Както обикновено обаче, и тук сред равните има някои по-равни, за които са запазени специални буквени означения. На първо място сред тях стои, разбира се, числото $\pi = 3{,}1415...$, а след него се нарежда числото на Непер, основата на естествените логаритми $e = 2{,}7182...$ . Изглежда, че основен претендент за третото място е ирационалното число, означавано с буквата Ф, което е тясно свързано с т. нар. *златно сечение*.

Съществуват няколко еквивалентни определения за Ф, например:

– Алгебрично определение: Ф е положителният корен на квадратното уравнение

(1) $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0,$ т.е. $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}6180\ ...$ .

– Едномерно геометрично определение (дадено от Евклид): Ф е отношението между по-дългата към по-късата части на отсечка, (фиг.1):



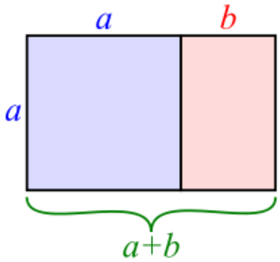

Фиг.1.

за която отношението между дължините на цялата отсечка и по-дългата ѝ част има същата стойност:

(2) $$\Phi \equiv \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

(Ако дясната част представим като сума от две дроби и използваме означението $\Phi \equiv \frac{a}{b}$, получаваме уравнението $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$, което е еквивалентно на (1).

– Двумерно геометрично определение: Ф е отношението между дългата към късата страна на правоъгълник, от който, като отстраним квадрат със страна, равна на късата страна, оставащият правоъгълник е подобен на началния (фиг. 2):




$$\Phi \equiv \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Фиг. 2.

От последното определение следва, че ако от по-малкия правоъгълник отстраним квадрат със страна $b$, ще остане правоъгълник със страни $b$ и $a – b$, дължините на които са в същото съотношение Ф и т.н. – до безкрайност.

Интересните свойства, ролята и значението на числото Ф[1], защо то се нарича *златно сечение* (*златна пропорция*, *златна среда* и др.п.) са описани подробно в книгата на известния астрофизик Марио Ливио[2]. Според автора:

„*Някои от най-великите математически умове на всички времена, от Питагор и Евклид в древна Гърция, през средновековния италиански математик Леонардо от Пиза и възрожденския астроном Йохан Кеплер, до днешните учени от рода на оксфордския физик Роджър Пенроуз, са изкарали безкрайни часове над това просто отношение и неговите свойства. Но обаянието на златното сечение не се ограничава само до математиците. Биолози, художници, музиканти, архитекти, психолози и дори мистици са размишлявали и дебатирали основанията за неговата вездесъщност и притегателна сила. В действителност може да се каже, че златното сечение е вдъхновявало мислители от всички дисциплини повече от всяко друго число в историята на математиката.*”[3]

Не са ясни съображенията, поради които от споменатата редица *биолози, художници...* и т.н. авторът на цитата е изключил физиците. Книгата му обаче изобилства с примери, показващи, че Ф играе роля както във физиката (напр. теорията на квазикристалите, на фракталните структури и хаоса), така и в астрофизиката (формата на ръкавите на спиралните галактики).

По-долу ще посочим една област, в която Ф дори изпреварва стоящите преди него в редицата на известните числа $\pi$ и $e$ – това е областта на физичните задачи. Трудно е, например, да си представим физична задача, чиито отговор е $\pi$ или $e$, ако тези числа не са предварително заложени в параметрите, включени в условието на задачата. Оказва се обаче, че има задачи, при това отнасящи се до стоящи твърде далеч една от друга области на физиката, чиито отговор е Ф. Тук ще посочим две подобни задачи, които илюстрират свойството на това число да се появява в случаи, в които това най-малко може да се очаква.

---

[1] Това означение също има своята история. Първоначално числото $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ се означава с τ – първата буква на старогръцкото τόμη – срязвам. Едва в началото на 20. век американският математик Марк Бар предлага то да се означава с Ф – първата буква от името на прочутия древногръцки скулптор Фидий (490–430 г. пр. Хр.), който често и точно използвал това число в творенията си.

[2] **Mario Livio**,*The Golden Ratio: The Story of Phi, The World's Most Astonishing Number*, Broadway Books, N.Y., 2002.

[3] В същата книга авторът сочи, че голяма част от случаите, в които Ф играе роля, се дължи на връзката му с известната редица от числа на Фибоначи (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...). Оказва се че $n$-тият член на тази редица може да се пресметне по формулата $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\Phi^n - (-\Phi)^{-n}]$. Освен това той отбелязва, че в известен смисъл Ф и *най-ирационалното* измежду ирационалните числа, тъй като безкрайната верижна дроб, чрез която може да се представи, е най-бавно сходяща:$\Phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}$ (знаменателите съдържат само единици!).

**Първа задача.** Задачата е свързана с конструирането на домакински електронагревателни уреди. Известно е, че те обикновено се управляват с ключ, който освен нулево (неутрално) положение има още четири степени: „1”, „2”, „3” и „4”, съответстващи на нарастваща мощност на топлоотделянето.

Поставете се на мястото на конструктор, който трябва да направи котлон, чиито четири степени имат отнапред зададени мощности $P_1 < P_2 < P_3 < P_4$. Най-лесното решение на задачата е в плочата на котлона да се вградят четири резистора с подходящи съпротивления така, че когато им се подава стандартното напрежение $U$ = 220 V, в тях да се отделя топлина с всяка от четирите желани мощности.

Най-простото решение обаче не е най-икономично от гледна точка на това, че четири различни мощности могат да се постигнат и с по-малък брой резистори – например с два, стига с помощта на подходящ ключ мрежовото напрежение да се подава на различни техни комбинации. Така например, ако означим съпротивленията на резисторите с $R'$ и $R''$ ($R' < R''$), минимална мощност ще се отдели при последователното им свързване, тъй като тогава еквивалентното съпротивление е най-голямо ($R' + R''$), а мощността е обратно пропорционална на съпротивлението ($P = \frac{U^2}{R}$). За втората степен на котлона напрежението трябва да се подаде само на по-голямото от двете съпротивление, за третата – на по-малкото, а за четвъртата степен, когато в плочата трябва да се отдели най-голямата мощност, резисторите трябва да се свържат успоредно (тогава еквивалентното съпротивление $\frac{R'R''}{R'+R''}$ е минимално).

Това решение наистина е най-икономично по отношение броя на резисторите, но то не винаги съществува. Така например, не е възможно да се подберат резисторите така, че четирите мощности да образуват аритметична прогресия[4] (примерно 500 W, 750 W, 1000 W и 1250 W). Нещо повече – тъй като частното между максималното ($R' + R''$) и минималното ($\frac{R'R''}{R'+R''}$) съпротивление е не по-малко[5] от 4, то задачата за подбиране на $R'$ и $R''$ няма решение, ако не е изпълнено неравенството $4P_1 < P_4$.

Интересно е обаче, че двата резистора може да се подберат така, че четирите мощности $P_1$, $P_2$, $P_3$ и $P_4$ да образуват не аритметична, а геометрична прогресия.

Наистина, нека първо, при посочените по-горе четири начина на подаване на напрежението, да изразим мощностите чрез съпротивленията:

$$P_1 = \frac{U^2}{R'+R''}, \quad P_2 = \frac{U^2}{R''}, \quad P_3 = \frac{U^2}{R'}, \quad P_4 = \frac{R'+R''}{R'R''}U^2.$$

С помощта на тези изрази можем да образуваме отношенията:

[4] Вж. напр. *Попов Хр.*,Задача, Физика, 4, 2007, стр. 209, а също така http://phys.uni-sofia.bg/~cpopov/Almanah-pdf/I%20chast/2%20zadachi-eseta/34%20kotlon.pdf.

[5] Наистина, $\frac{(R'+R'')^2}{R'R''} = 4 + \frac{(R'-R'')^2}{R'R''} > 4$.

(3) $$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{R'}{R''} \qquad \frac{P_3}{P_2} = \frac{R''}{R'} \qquad \text{и} \qquad \frac{P_4}{P_3} = 1 + \frac{R'}{R''}.$$

Тъй като десните страни на първото и на третото от тези равенства съвпадат, трите равенства ще бъдат изпълнени едновременно, стига $R'$ и $R''$ да удовлетворяват равенството:

$$1 + \frac{R'}{R''} = \frac{R''}{R'}.$$

Въвеждайки означението $x = \frac{R''}{R'}$, за $x$ получаваме уравнението:

(4) $$x^2 - x - 1 = 0,$$

което представлява точно дефиниционното за Ф уравнение (1).

И така, отговорът на въпроса:

*Възможно ли два резистора да се подберат така, че възможните четири мощности на топлоотделяне в тях да образуват геометрична прогресия?*

е:

*Да, стига отношението между съпротивленията на резисторите да бъде Ф.*

При това, от (2) се вижда, че и показателят на въпросната прогресия е Ф:

(5) $$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} = \frac{P_4}{P_3} = \Phi.$$

Забележете още, че от (5) следва и $P_4 = \Phi^3 P_1 = (1{,}6180...)^3 \approx 4{,}236 P_1$, т.е., както следва и да се очаква, необходимото за съществуване на решение неравенство $4P_1 < P_4$, е изпълнено[6].

**Втора задача.** Известно е, че силата на тежестта, с която Земята привлича едно тяло, е максимална, когато тялото лежи на земната повърхност. Ако тялото се отдалечава от Земята, тежестта му $P$ намалява обратно пропорционално на квадрата на разстоянието $r$ до центъра на Земята – $P \sim 1/r^2$, като при безкрайно голямо разстояние става нула. Силата на тежестта обаче намалява и когато тялото, тръгвайки от земната повърхност, приближава центъра на Земята – в самия център тази сила е отново нула.

От тези факти и от съображения за непрекъснатост следва, че на всяка точка от извънземното пространство може да се съпостави точка от вътрешността на Земята, така че силата на тежестта в тези две точки има една и съща големина. Не е трудно да

[6] В търговската мрежа се продава например резервна нагревателна плоча за котлон, в която са монтирани резистори със съпротивления $R' = 95\ \Omega$ и $R'' = 155\ \Omega$. Лесно се проверява, че тяхното отношение е много близко до Ф. Затова и пресметнатите мощности образуват геометрична прогресия. (В паспорта на уреда стойностите им са закръглени на 200 W, 300 W, 500 W и 800 W.)

се намери връзка между разстоянията на тези точки до центъра на Земята и земния радиус $R$. Тук ще разгледаме обаче по-конкретен въпрос: дали измежду безброй многото подобни двойки точки съществува такава (или такива), които отстоят на едно и също разстояние от земната повърхност? (Разбира се, едната извън, другата – вътре в нея.)

За да отговорим на въпроса трябва да припомним как тежестта на едно тяло зависи от разстоянието $r$ до центъра на Земята за случая $r < R$, където $R$ е земният радиус. Разбира се, ще смятаме, че Земята е хомогенна, т.е. – плътността ѝ $\rho$ навсякъде е еднаква. Това опростяващо предположение позволява да използваме едно свойство, присъщо на всички сили, които намаляват като $1/r^2$ с отдалечаване от своя източник. Формулирано за силата на тежестта то гласи[7]:

*Когато източниците на гравитационната сила притежават сферична симетрия, тежестта на тяло, разположено на разстояние r от центъра на симетрия не зависи от масите, намиращи извън сферата с радиус r и е същата, каквато би била, ако останалите маси се поставят в този център.*

Именно поради това свойство, ако означим масата на Земята с $M$, силата, с която тя привлича тяло с маса $m$, намиращо се извън нея на разстояние $r$ от центъра ѝ, се описва с формулата:

(6) $$P = G\frac{mM}{r^2} \qquad \text{при } r > R,$$

въпреки че близо до земната повърхност Земята не може да се разглежда като точкова маса (тук $G$ е гравитационната константа).

Същото свойство дава възможност да намерим зависимостта на $P$ от $r$ и за случая $r < R$. И в този случай формулата за силата на тежестта е:

(7) $$P = G\frac{mM(r)}{r^2} \qquad r < R,$$

но в нея вече $M(r)$ е масата не на цялата Земя, а само на частта ѝ, затворена в сферата с радиус $r$. С помощта на формулата за обем на кълбо с радиус $r$ за $M(r)$ получаваме:

$$M(r) = \rho\frac{4}{3}\pi r^3.$$

Като заместим този израз в (7), за зависимостта на тежестта от разстоянието до центъра на Земята получаваме:

$$P = G\frac{m}{r^2}\rho\frac{4}{3}\pi r^3,$$

или, като изразим от равенството $M = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$ плътността $\rho$ чрез общата маса и радиуса на Земята, окончателно:

[7] В учебниците по физика обикновено доказателство на въпросното свойство се привежда в раздел *Електростатика*. Вж. напр. **М. Борисов** и др., Физика, учебник за 10. клас, С., Народна просвета, 1972, както и **Хр. Попов, Т. Сугарев, Др. Иванов**, Физика за 11. клас, С., Просвета, 1992.

(8) $$P = G\frac{mM}{R^3}r \qquad \text{при } r < R.$$

Чрез формули (6) и (8) ще намерим отговор на въпроса съществуват ли точки над и под земната повърхност, в които тежестта на телата е една и съща. Наистина, да означим с $h$ разстоянието от тези точки до земната повърхност. Ако те наистина съществуват, според споменатите формули ще бъде изпълнено равенството:

$$G\frac{mM}{(R+h)^2} = G\frac{mM}{R^3}(R-h).$$

Това равенство представлява уравнение за $h$, което лесно се привежда във вида (1):

(9) $$\left(\frac{R}{h}\right)^2 - \frac{R}{h} - 1 = 0.$$

От сравнението с (1) следва, че $\frac{R}{h} = \Phi$ и отговорът на интересуващия ни въпрос се оказва положителен: тежестта на всяко тяло, намиращо се над земната повърхност на височина $h = \frac{R}{\Phi} \approx 0{,}619R$ е такава, каквато е под земната повърхност на същата дълбочина $h$.

И така, ако решаваме задача:

*Съществуват ли точки, равноотдалечени от земната повърхност, но едната вътре, а другата вън от нея, в които тежестта на телата е еднаква?*

отговорът е:

*Да, като отношението между радиуса на Земята и разстоянието от повърхността ѝ до коя да е от тези точки е Ф.*

Това са само два от многобройните примери, които илюстрират забележителното свойство на числото Ф да се появява в най-разнообразни, нямащи никаква връзка помежду си физични ситуации. Или, както казва Марио Ливио в споменатата в началото книга: „Чарът на златното сечение произтича на първо място и най-вече от факта, че то притежава почти мистериозното качество да изниква там, където се очаква най-малко."