Устойчивост на куб

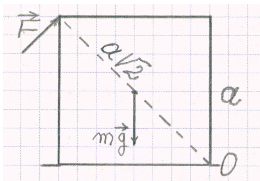
Известно е, че устойчивостта на равновесното положение на тяло, лежащо върху опора, зависи както от големината на опорната площ, така и от височината на центъра на масите над нея. Първата зависимост обаче понякога се забравя и се смята, че при две тела с една и съща форма по-устойчиво е равновесието на тялото, чиито център на масите е по-ниско. Следващата задача показва заблудата, в която можем да изпаднем, разсъждавайки по този начин.

Задача. Два хомогенни куба от един и същ материал лежат върху грапава хоризонтална равнина. Покажете, че по-устойчиво е положението на по-големия куб.

Енергетичен подход

Анализ. Нека първо изберем критерий за оценка степента на устойчивост на едно равновесно положение. В равновесно положение кубът лежи върху една от стените си. Тъй като равнината, върху която лежи е грапава, т.е. триенето между допиращите се повърхности – достатъчно голямо, действие на сила, перпендикулярна на една от стените, не може да премести куба – възможно е само въртящият момент на силата да предизвика завъртането му спрямо долния ръб *O* на противоположната стена (фиг. 1). При това центърът на масите на куба ще започне да се издига, т.е. външната сила ще извърши определена работа. Равновесието ще се наруши, т.е. кубът ще се претърколи върху съседната стена, ако центърът на масите се окаже над ръба, около който става завъртането.

Този анализ подсказва, че една възможност е като критерий за степента на устойчивост на равновесното положение да изберем количеството работа, която трябва да извърши външната сила, за да претърколи куба. А тъй като от енергетична гледна точка единственият резултат от действието на външната сила е повишаването на потенциалната енергия на куба, по-устойчиво ще смятаме това положение, извеждането от което изисква по-голямо увеличение на неговата потенциална енергия. Условно този критерий може да наречем *енергетичен*.



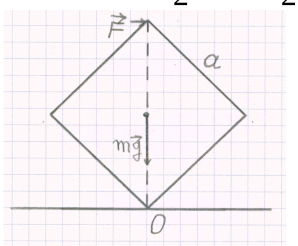
Фиг. 1.

Решение. От фиг. 1 се вижда, че височината h на центъра на масите на куба в равновесното положение е:

(1) $$h = \frac{a}{2}.$$

Ако означим с ρ плътността на куба и отчитаме гравитационната потенциална енергия от равнището на долната основа, потенциалната енергия в равновесното положение е:

(2) $$E_{p1} = mgh = \rho g a^3 . \frac{a}{2} = \rho g \frac{a^4}{2}.$$



Фиг. 2.

Височината на центъра на масите на куба, когато той се намира над неподвижния ръб (фиг. 2), е $h' = a\sqrt{2}/2$, а потенциалната енергия:

(3) $$E_{p2} = mgh' = \rho g a^3 . a\frac{\sqrt{2}}{2} = \rho g a^4 . \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

От (3) и (2) получаваме, че увеличението на потенциалната енергия (и съответно – работата A на външната сила) е:

(4) $$A = E_{p2} - E_{p1} = \rho g a^4 \frac{\sqrt{2}-1}{2}.$$

Вижда се, че работата, която трябва да извърши външната сила, за да извади куба от равновесното му положение, е пропорционална на четвъртата степен от неговия ръб. Следователно, въпреки че центърът на масите на по-големия куб се намира по-високо, отколкото центъра на масите на по-малкия, по-устойчиво е положението именно на по-големия куб.

Силов подход

Анализ. Не е изключено предложеният *енергетичен подход* и съответстващият му критерий да ви се сторят неубедителни. Наистина, ако човек трябва да прекатури един сандък, той мисли не за работата, която трябва да извърши, а по-скоро за **силата,** която трябва да приложи. От тази гледна точка е логично по-стабилно да наречем онова равновесно положение, от което можем да извадим тялото само с помощта на по-голяма сила – този критерий можем да наречем условно *силов*.

Решение. С най-малка сила бихме преобърнали куба, ако приложим силата в горния ръб, който е противоположен на ръба, около който става въртенето, а посоката й е перпендикулярна на равнината, свързваща двата ръба – в този случай въртящият момент на силата е максимален и равен на $Fa\sqrt{2}$ (вж. фиг. 1). В същото време големината на въртящия момент на силата на тежестта спрямо същата ос на въртене е $mga/2$, а посоката му – противоположна на посоката на момента на силата F. Следователно F ще започне да завърта куба, ако е изпълнено неравенството:

(5) $$Fa\sqrt{2} > mga/2 \qquad \text{или} \qquad F > \rho g \frac{a^3}{2\sqrt{2}}.$$

Щом завъртането около долния ръб започне, рамото на силата на тежестта започва да намалява, така че по-нататък, ако не искаме да придадем на куба някаква кинетична енергия, трябва съответно да намаляваме и силата F.

Резултатът (5) показва, че и според *силовия критерий* колкото по-голям е кубът, толкова по-устойчиво е равновесието му. Разликата от предишните, енергетични разглеждания е само в това, че докато при тях устойчивостта расте с четвъртата степен от размерите (a), сега зависимостта е по-слаба – пропорционална е на третата им степен.

Коментар. От определена гледна точка получените и в двата подхода резултати изглеждат тривиални – ясно е, че колкото по-голям (а следователно – и по-тежък) е един куб, толкова по-трудно ще го преобърнем на една от страничните му стени. Може би по-убедителни резултати бихме получили, ако по някакъв начин *нормираме* използваните критерии. Една възможност е да извършим нормирането към единица обем, като разделим на a^3, т.е. на обема на куба, или към единица маса, като разделим на $m = \rho a^3$.

При този допълнителен критерий от (4) получаваме съответно:

$$\frac{A}{a^3} = \rho g \frac{\sqrt{2}-1}{2} a, \qquad \frac{A}{m} = g\frac{\sqrt{2}-1}{2} a.$$

т.е. *специфичната* работа, която трябва да извършим при превъртане на единица обем (или на единица маса) от куба, е правопропорционална на дължината на реброто му. От тази гледна точка можем да кажем, че наистина колкото по-голям е кубът, толкова по-стабилно е равновесното му положение.

По аналогичен начин от (5) обаче получаваме:

$$\frac{F}{a^3} > \rho g \frac{1}{2\sqrt{2}}, \qquad \frac{F}{m} > \frac{g}{2\sqrt{2}}.$$

Тези резултати показват, че от гледна точка на силовия подход стабилността на един куб не зависи от размерите му – силата, която трябва да приложим за превъртане на единица обем или единица маса е една и съща, не зависи от дължината на реброто.