Падаща тухла отскача от каучуково топче

Преди години на участниците в една от международните олимпиади по физика в Съветския съюз бе предложена следната качествена задача, включена и в интернет-колекцията от задачи на Я. Кантор (http://star.tau.ac.il/QUIZ/, ноември, 1998). Задачата е интересна, първо, с това, че макар в условието ѝ да не фигурира нито едно число и методът на решаването ѝ всъщност да е **качествен**, отговорът е числен, т.е. – **количествен**. Както обаче сме обръщали внимание и при други задачи, и тази допуска преход от качествено към количествено разглеждане, при което в случая съществено се променя количественият резултат.

Задача 1. Тежка тухла пада върху лежащо на хоризонтална плоскост малко каучуково топче. След абсолютно еластичен удар тухлата отскача вертикално на почти същата височина, от която е пусната. На каква височина отскача топчето?

„Квазикачествено" решение. От условието се подразбира, че масата на топчето е много по-малка от масата на тухлата. Преди всичко трябва да отговорим на въпроса защо, щом ударът е еластичен, тухлата не отскача на височината, от която е паднала, а само на *почти* същата височина. За целта трябва да разгледаме по-детайлно явлението.

Първо, от момента на докосване на тухлата до топчето, до момента, в който скоростта на тухлата става нула, нейната кинетична енергия се преобразува в енергия на еластичната деформация на топчето. От този момент нататък започва обратен процес: топчето започва да възстановява формата си, оттласква тухлата нагоре и енергията на деформацията отново се преобразува в кинетична енергия на тухлата. Ако запасената в топчето енергия се предаде изцяло на тухлата, тя би отскочила на височина, *точно* равна на началната. Фактът, че в условието е указано, че височината е по-малка, подсказва, че трябва да се отчете още някакво явление.

За да стане ясно какво пропускаме дотук, разглеждаме ситуацията в момента, в който топчето възстановява сферичната си форма, тухлата се отделя от него и излита нагоре. В този момент скоростите на тухлата и на най-горната точка от топчето са равни. В същия момент скоростта на най-долната точка от топчето, тази, която се допира до хоризонталната плоскост, както през цялото времетраене на удара, е нула. Следователно скоростта на *центъра на масите* на топчето, намиращ се *по средата* между неговите най-горна и най-долна точка, ще се движи нагоре със скорост, равна на половината от скоростта, с която отскача тухлата. Тъкмо поради наличието на тази скорост, след удара топчето не остава върху плоскостта, а също отскача нагоре. И тъй като височината, до която достига хвърлено нагоре тяло, е правопропорционална на квадрата на началната скорост ($h = \dfrac{v^2}{2g}$)[1], щом скоростта на топчето е два пъти по-малка от скоростта на тухлата, **то ще се издигне на височина, четири пъти по-малка от височината, на която се е издигнала тухлата**.

Количествено решение. Дотук приведеното решение съвпада с посоченото в интернет, такова вероятно е било и решението, зачитано като вярно на олимпиадата. Малко по-задълбочено в **количествено отношение** разглеждане на въпроса обаче внася съществена поправка в получения отговор. За съжаление, заради едно елементарно интегриране, това разглеждане излиза извън рамките на гимназиалната физика.

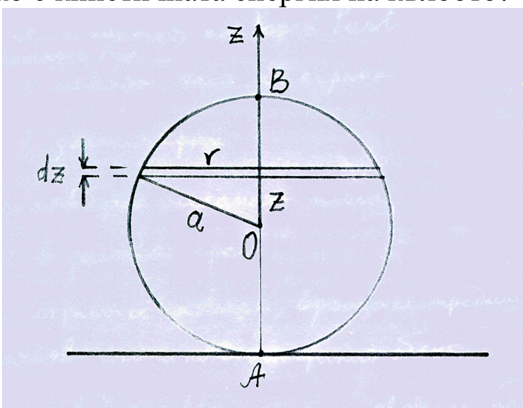
Съществен момент в „квазикачественото" решение е предположението, че в момента, в който тухлата се отделя от топчето, скоростта на всяка частица от топчето е *правопропорционална* на разстоянието от частицата до неподвижната хоризонтална равнина. Оттук следва, че не разглеждаме топчето като материална точка, а като тяло с крайни размери. Тук не подлагаме на съмнение това предположение – ще го използваме

[1] Причина да наречем решението „квазикачествено" е позоваването на тази формула.

докрай, но фактът, че има частици на топчето, които се движат с различни скорости, поставя въпроса коя от тях следва да използваме като начална скорост при отскачането му? В приведеното решение се използва скоростта на центъра на масите, но не е ясно има ли аргументите в полза на този избор.

За да намерим някаква аргументация за избора на начална скорост, ще използваме закона за запазване на механичната енергия: гравитационната потенциална енергия на топчето в най-високата точка от траекторията му трябва да е равна на кинетичната енергия в момента на отскока от хоризонталната равнина. И тъкмо това твърдение дава повод за съмнение в правилността на направения по-горе избор, тъй като кинетичната енергия на една частица е правопропорционална не на скоростта на частицата, а на квадрата на скоростта. При това положение съвсем не е ясно дали кинетичната енергия на топчето в момента на отскачането ще бъде $\frac{mu^2}{2}$, където m е масата на топчето, а u – скоростта на неговия център на масите. За да се ориентираме в ситуацията, ще решим следната спомагателна задача 2.

Задача 2. Хомогенно кълбо с радиус a и маса m лежи върху хоризонтална равнина. В определен момент всяка от съставящите кълбото частици се движи нагоре със скорост, правопропорционална на разстоянието ѝ до равнината, като скоростта на центъра на кълбото е u. Колко е кинетичната енергия на кълбото?



Фиг. 1.

Решение. За да намерим израз за кинетичната енергия $E_к$ на кълбото, използваме координатна система с начало в неговия център и ос Oz, насочена нагоре (фиг.1). Да разгледаме тънък хоризонтален диск от кълбото с дебелина dz, който има апликата z и радиус r. Обемът на диска е $dv = \pi r^2 dz$, а масата му – $dm = \rho dv = \pi\rho r^2 dz$, където ρ = const е плътността на кълбото.

Според условието на задачата скоростта на всяка точка от кълбото зависи от апликатата z на точката и се описва с израза $u\left(1+\frac{z}{a}\right)$. (Съгласно с тази формула най-долната т. A на кълбото, за която $z = -a$, е неподвижна; скоростта на центъра O, за който $z = 0$, е u; най-горната т. B, за която $z = a$, има скорост $2u$.) При това положение кинетичната енергия на целия диск е:

$$dE_k = \frac{1}{2}\left[u\left(1+\frac{z}{a}\right)\right]^2 dm .$$

Общата кинетична енергия на кълбото намираме, като интегрираме този израз в граници $[-a, a]$ и в израза за dm отчетем, че $r = \sqrt{a^2 - z^2}$:

$$E_k = \int_{-a}^{a} \frac{1}{2} u^2 \left(1+\frac{z}{a}\right)^2 \pi\rho\left(a^2 - z^2\right)dz = \frac{\pi\rho u^2}{2} \int_{-a}^{a} \left(1+\frac{z}{a}\right)^2 \left(a^2 - z^2\right)dz .$$

Лесно се проверява, че резултатът от интегрирането е $\frac{8}{5}a^3$, така че изразът за кинетичната енергия на кълбото е:

$$E_k = \frac{\pi\rho u^2}{2} . \frac{8}{5} a^3 .$$

Като отчетем, че $V = \frac{4}{3}\pi a^3$ е обемът на кълбото, а $m = \rho V$ – неговата маса, за кинетичната му енергия в момента на отскачане получаваме окончателния израз:

$$E_k = \frac{24}{20}\left(\frac{1}{2} m u^2\right) = 1{,}2\left(\frac{1}{2} m u^2\right).$$

Обратно към задача 1. за тухлата и топчето. Резултатът от задача 2. показва, че кинетичната енергия на топчето е фактически 1,2 пъти по-голяма, отколкото ако я пресмятаме чрез скоростта на центъра на масите. И тъй като от тази енергия зависи височината h, на която ще се издигне топчето ($E_k = mgh$), заключаваме, че топчето ще се издигне на височина, с 20% по-голяма, отколкото пресметнатата в "квазикачественото" решение (т.е. височината на отскачане на топчето ще бъде не 0,25, а 0,30 част от височината, на която отскача тухлата).

По-нататъшно задълбочаване в проблема. При количественото разглеждане изпускаме едно явление, което намалява височината, достигана от топчето. Ние приемаме, че в момента на отскачането му от хоризонталната равнина всички негови точки имат насочени нагоре скорости (макар и различни по големина). Това означава, че две частици от топчето с маси Δm и $\Delta m'$ и с различни апликати (различно z) се движат една спрямо друга. И тъй като между тях действат сили на еластичност, под действие на тези сили частиците ще започнат да извършват трепетливи движения – в топчето ще се разпространяват механични вълни на еластичност. Понеже разглеждаме идеален случай, в който няма дисипативни сили, тези вълни не затихват и когато топчето е в най-високата си точка, част от началната му енергия ще се носи от тези вълни. Следователно в този момент гравитационната потенциална енергия ще бъде по-малка от началната кинетична енергия на топчето, което от своя страна показва, че височината на издигане ще бъде по-малка, отколкото когато не отчитаме вълновото движение.

Ако искаме да оценем енергията, носена от механичните вълни, трябва вече да правим конкретни предположения относно еластичните свойства на топчето.

(Между другото, механични вълни се пораждат още от момента на досега на тухлата с топчето, но тяхната енергия влияе на височината, на която се издига тухлата, а не и на съотношението между максималните височини, достигнати от двете тела, защото **приехме**, че в момента на отскачане на топчето скоростите на всички частици са насочени нагоре и по големина – правопропорционални на техните апликати.)