Колко далеч са небесата?

Според една книга[1] с писма от деца до Айнщайн и с отговори на учения до децата, през 1952 г. Айнщайн получил следното писмо на ученика Джери от Ричмонд, Вирджиния:

Уважаеми господине,

Аз съм ученик в гимназията и се сблъсках със следния проблем.

С моя учител говорехме за Сатаната. Разбира се, Вие знаете, че когато той падал от небесата, падал девет дни и девет нощи с 32 фута в секунда и всяка секунда скоростта му нараствала.

Казаха ми, че има фолума (формула) *за това. Знам, че Вие нямате време за подобни дреболии, но, ако е възможно, моля Ви, изпратете ми фолумата.*

Благодаря Ви,
Джери

Не е ясно дали Айнщайн е отговорил на това любезно писмо, както не е ясно и защо Джери не е попитал за "фолумата" своя учител (може би разговорът му е бил с учителя по религия, а не по физика). Писмото обаче дава повод на Хенри Грийнсайд в своята колекция от задачи *Duke Physics Challenges* да постави въпроса от каква височина всъщност е падал Сатаната, т.е. – колко далеч от нас се намират небесата. При това предлага задачата да се реши в два варианта: първо, при предположение, че падането се осъществява в хомогенно гравитационно поле с ускорение g = 10 m/s^2, и, второ, че полето е нехомогенно и, съгласно със закона на Нютон, ускорението зависи от разстоянието до центъра на Земята. И в двата случая се приема, че началната скорост на падането е нула.

Предвид факта, че девет денонощия съдържат кръгло t = 7,8.10^5 s, при първия вариант по формулата $h = \frac{1}{2}gt^2$ лесно пресмятаме, че небесата би трябвало да се намират на около 3 млрд километра от Земята. При това пресметнатата по формулата $v = gt$ скорост, с която Сатаната би се ударил в земната повърхност, се оказва почти релативистична – от порядъка на 7,8.10^6 m/s.

Поради огромната разлика между полученото разстояние и земния радиус R = 6,4.10^6 m е ясно, че направеното приближение е много грубо – не е възможно да смятаме, че на милиарди километри от Земята земното ускорение е все още g = 10 m/s^2. Ето защо трябва да оценим получения резултат като многократно завишен.

За да решим задачата, отчитайки че ускорението зависи от разстоянието r до центъра на Земята, ще използваме законите на Кеплер и някои резултати, получени в материала, озаглавен *Вариации на тема гравитация* (файл 04 variacii na tema от папката 1 metodika). (Същият метод се прилага при решаване на популярната задача за намиране времето, за което Земята би паднала върху Слънцето, ако внезапно изгуби орбиталната си скорост.)

Основни факти от споменатия файл са, например, че елипса с ексцентрицитет ε = 0 представлява окръжност, в центъра на която се намират двата фокуса, а елипса с ексцентрицитет ε = 1 е всъщност двойна отсечка, като фокусите на елипсата са в краищата на отсечката. Съгласно с първия закон на Кеплер, траекториите на движещите се в земното гравитационно поле тела са елипси, единият фокус на които е в центъра на Зе-

---

[1] *Dear Professor Einstein: Albert Einstein's Letters to and from Children*, издадена от Alice Calaprice, Prometheus Books, 2002.

мята. Според третия закон на Кеплер, периодите на всички движения, които се осъществяват по елипси с еднакви големи полуоси, са равни ($\frac{T^2}{a^3} = \text{const}$).

Тяло, намиращо се на разстояние r от центъра на Земята и пуснато да пада без начална скорост се движи по отсечката, която свързва началната точка с този център – т.е., в съответствие с гореказаното, траекторията му представлява елипса с ексцентрицитет ε = 1 и голяма полуос $r/2$. Времето за достигане центъра на Земята (последната разглеждаме като материална точка!) ще бъде точно $T/2$, където T е периодът на движението по тази напълно сплесната елипса. От своя страна, според цитирания трети закон, този период T е равен на периода на тяло, движещо се по *кръгова* орбита с радиус $r/2$ и център – центъра на Земята. Този период пресмятаме, като първо чрез приравняване на центростремителната сила и гравитационната сила намерим скоростта на движение по кръговата орбита:

$$\frac{mv^2}{\left(\frac{r}{2}\right)} = G\frac{mM}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}, \qquad \text{т.е.} \qquad v = \sqrt{\frac{2GM}{r}},$$

където m и M са масите съответно на падащото тяло и на Земята, а G – гравитационната константа. И тъй като дължината на окръжността е $2\pi(r/2)$, въпросният период е:

$$T = \frac{2\pi\left(\frac{r}{2}\right)}{v} = \frac{\pi r}{\sqrt{\frac{2GM}{r}}} = \frac{\pi r^{3/2}}{\sqrt{2GM}} = \frac{\pi r^{3/2}}{R\sqrt{2g}},$$

като в последното равенство сме отчели, че съгласно с формулите в цитирания файл $\sqrt{GM} = R\sqrt{g}$.

Тъй като зададеното в условието на "задачата" време t представлява половината от периода T, за намиране на разстоянието r получаваме уравнението:

$$t = \frac{\pi r^{3/2}}{2R\sqrt{2g}},$$

от което определяме:

$$r = 2\left(\frac{tR}{\pi}\right)^{2/3} g^{1/3}.$$

След заместване с числените стойности и извършване на съответните пресмятания, за разстоянието до "небесата" получаваме $r \approx 5{,}8.10^8$ m. Тази стойност е почти 100 пъти по-голямо от земния радиус, така че грешката, която правим, като смятаме че това е разстоянието от земната повърхност (а не от центъра на Земята) до небесата, е от порядъка на 1 %.

Факт, който заслужава да бъде отбелязан, е следният: когато смятахме в най-грубото приближение (хомогенно гравитационно поле), за търсеното разстояние получихме 30.10^8 m, при по-точното решение получаваме само 5 пъти по-малко разстояние, т.е. разлика, която не представлява и един порядък, т.е. не може да се твърди, че първият резултат е "многократно завишен".

Скоростта, с която Сатаната достига земната повърхност може да се пресметне само с помощта на закона за запазване на механичната енергия, като се отчете, че потенциалната енергия на тяло с маса m, намиращо се на разстояние r от центъра на Земята, е $-G\frac{mM}{r}$. Така в случая въпросният закон има вид:

$$-G\frac{mM}{r}=\frac{mv^2}{2}-G\frac{mM}{R}.$$

Ако все още ни задоволява точност от 1 %, можем да пренебрегнем $\frac{1}{r}$ спрямо $\frac{1}{R}$ член (което е еквивалентно да смятаме, че Сатаната пада от безкрайност). В този случай, като използваме отново формулите от цитирания в началото файл, намираме, че Сатаната ще се удари в земната повърхност с втора космическа скорост ($v=\sqrt{2gR}$ ≈ 11,3 km/s). Сравнението със стойността, получена при предположение, че движението се извършва в хомогенно гравитационно поле, показва, че разликата в случая е почти три порядъка!