Със снаряд до Луната

Преди около век и половина, т.е. далеч преди епохата на космичните ракети, големият френски писател – фантаст Жул Верн описва пътешествие до Луната, извършено с помощта на снаряд (днес бихме го нарекли космически кораб), изстрелян с помощта на гигантско оръдие. В някои учебници и сборници със задачи по физика[1] се предлага да се намери минималната скорост, с която би следвало да се изстреля снарядът, за да достигне Луната. Обикновено решението се свежда до намиране на скоростта, която трябва да се предаде на едно намиращо се върху земната повърхност тяло, за да се отдалечи то на разстояние L = 380 000 km от центъра на Земята.

При такава постановка скоростта може да се намери с помощта на закона за запазване на механичната енергия, като се отчете, че върху земната повърхност снарядът има и кинетична, и гравитационна потенциална енергия, а на разстояние L – само потенциална енергия. Гравитационната потенциална енергия на тяло с маса m, намиращо се на разстояние L от центъра на Земята (при $L \geq R$, където R е радиусът на Земята, а M – масата ѝ), е:

(1) $$E_p = -G\frac{mM}{L}.$$

(G – гравитационната константа.) От закона за запазване на механичната енергия в случая получаваме:

(2) $$\frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{R} = -G\frac{mM}{L}.$$

Оттук за търсената скорост намираме формулата:

(3) $$v = \sqrt{2G\frac{M}{R\left(1-\frac{R}{L}\right)}}.$$

Понеже величината:

(4) $$v_2 = \sqrt{2G\frac{M}{R}}$$

представлява втората космическа скорост, а разстоянието L до Луната е 60 пъти по-голямо от земния радиус R, според формула (3) снарядът трябва да бъде изстрелян със скорост, представляваща 99 % от v_2.

Оказва се, че при такава постановка грешката, която бихме направили, ако смятаме, че Луната е безкрайно далече от Земята, е от порядъка на 1 %. От този факт възниква съмнение въобще в коректността на постановката, защото в реалната ситуация снарядът се движи в гравитационното поле не на едно, а на две тела – на Земята и на Луната. Не правим ли грешка, по-голяма от 1 %, като пренебрегваме влиянието на Луната?

За да отговорим на този въпрос, ще решим следната задача.

Задача. Намерете минималната скорост v, която трябва да придадем на тяло върху повърхността на Земята, така че то да може да достигне повърхността на Луната. Масата $M_З$ = 6,0.10^{24} kg и радиуса $R_Л$ = 6,4.10^6 m на Земята, масата $M_Л$ =

[1] **Дж. Орир** Физика, т. 1, М., Мир, 1981.

$7{,}4.10^{22}$ kg на Луната, както и разстоянието L = $3{,}8.10^8$ km между центровете на Земята и Луната са известни.

Анализ. Разбира се, и при тази по-реалистична постановка ще направим опростяващи предположения, пренебрегвайки такива "маловажни" фактори, като околоосното въртене на Земята, движението на двете небесни тела около общия им център на масите и съпротивлението на земната атмосфера. При това положение скоростта ще бъде минимална, ако изстреляме снаряда по посока на Луната от онази точка на земната повърхност, която е най-близо до Луната.

От общи съображения е ясно, че търсената скорост ще бъде по-малка от определената с формула (3). Наистина, върху траекторията на снаряда има една равновесна точка, в която гравитационните сили, с които Земята и Луната привличат снаряда, имат равни големини и противоположни посоки. Тъй като тази точка е по-близо до Земята, отколкото Луната, скоростта, необходима за достигането ѝ е по-малка от определената по формула (3). Достатъчно е да придадем на снаряда малко по-голяма скорост и той, подминавайки равновесната точка, вече ще се ускорява и ще достигне Луната под влияние на нейното привличане.

Така целият въпрос се свежда до това, дали разликата между скоростта, необходима за достигане на равновесната точка и втората космическа скорост е по-голяма или по-малка от 1 %. Ако е по-голяма, тогава приближението, направено при получаване на формула (3), т.е. пренебрегването на гравитационното поле на Луната, е неоправдано.

Решение

Да намерим първо разстоянието r до точката от траекторията на снаряда, в която силите на привличане от страна на Земята и на Луната имат равни големини и противоположни посоки. От закона на Нютон за гравитацията следва, че в тази точка е изпълнено равенството:

(5)
$$G\frac{M_З}{r^2} = G\frac{M_Л}{(L-r)^2}.$$

Решението на това уравнение може да се представи във вида:

(6)
$$r = \lambda L,$$

където с λ е означена безразмерната величина:

(7)
$$\lambda = \frac{1}{1+\sqrt{\dfrac{M_Л}{M_З}}} = 0{,}90.$$

Ако сме изстреляли снаряда с минималната скорост, на разстояние r от центъра на Земята той би бил неподвижен, т.е. общата му енергия би била равна на сумата от гравитационните потенциални енергии, дължащи се на полетата на Земята и на Луната:

(8)
$$W = -G\frac{mM_З}{r} - G\frac{mM_Л}{L-r}.$$

От закона за запазване на енергията следва, че същата ще бъде и енергията на снаряда при изстрелването от повърхността на Земята, където той има и кинетична енергия:

(9) $$W = \frac{mv^2}{2} - G\frac{mM_З}{R_З} - G\frac{mM_Л}{L - R_З}.$$

Чрез приравняване на десните страни на (8) и (9) и след отчитане на (4) и (6), за минималната скорост намираме израза:

(10) $$v = v_2\sqrt{1 + \mu\frac{R_З}{L - R_З} - \frac{R_З}{\lambda L} - \mu\frac{R_З}{L(1-\lambda)}},$$

където с $\mu = M_Л/M_З = 0{,}012$ е означено отношението между масите на Луната и на Земята.

Като отчетем, че $L = 60R_З$, за порядъка на трите члена след единицата в подкоренната величина получаваме съответно ≈ 0,0002, ≈ 0,019, ≈ 0,002. Очевидно е, че запазването на първия и третия член, които отчитат потенциалната енергия на тялото, дължаща се на гравитационното поле на Луната, е безсмислено – пренебрегването им внася грешка, значително по-малка от 1 %. След пренебрегването им изразът за v придобива вида:

(11) $$v = v_2\sqrt{1 - \frac{R_З}{\lambda L}}.$$

Тази формула се различава от (3) само по наличието на множителя λ в знаменателя на подкоренната величина. Величината $1/\lambda = 1{,}1$ сама по себе си не е може да се смята за единица – това би внесло грешка от порядъка на 10 %. Умножена обаче с малката величина $R_З/L = 1/60$ тя внася пренебрежимо малка поправка към намерената по формула (3) стойност.

И така, отчитането на гравитационната потенциална енергия на снаряда в полето на Луната, не подобрява точността на резултата, съдържаща се в израза (3).

Коментар. 1. Помислете, не бихме ли могли да стигнем до същия извод без проведените подробни пресмятания, имайки предвид само, че отношението между масите на Луната и Земята е 0,012, а отношението между радиуса на Земята и разстоянието до Луната – 1/60.

2. Отчитането на гравитационното поле на Луната обаче е задължително, ако искаме да пресметнем скоростта v_0, с която снарядът би достигнал повърхността на Луната. Когато не го отчитаме, тази скорост би била нула, но от направените в анализа разсъждения следва, че след равновесната точка снарядът ще започне да се ускорява към Луната и ще я достигне с някаква крайна скорост. Разбира се, в този случай вече значение ще има и стойността на радиуса на Луната $R_Л$, който е $0{,}273R_З$. За да пресметнем v_0 ще запишем израза за общата енергия на снаряда върху повърхността на Луната:

(12) $$W = \frac{m{v_0}^2}{2} - G\frac{mM_Л}{R_Л} - G\frac{mM_З}{L - R_Л}.$$

Ако приравним десните части на равенствата (12) и (8), от полученото уравнение с предишната точност получаваме, че снарядът ще достигне повърхността на Луната със скорост $v_0 \approx 0{,}21v_2$. Тъй като стойността на втората космическа скорост е приблизително 11 km/s, снарядът би достигнал повърхността на Луната със скорост, превишаваща 2 km/s. Не помня как Жул Верн описва кацането на Луната, но очевидно маневрите, които приземяващите се космически кораби предприемат в атмосферата на Земята за намаляване на скоростта, там, поради липса на атмосфера, са неприложими. По същата причина няма да помогнат и парашутни системи.