

Отново Архимед, но и Паскал

В училище хидростатиката се изучава твърде рано – може би заради относително лесно разбираемия смисъл на законите на Архимед и на Паскал. Това ранно изучаване и все още слабо развитата способност на учениците да правят по-дълги и абстрактни разсъждения, както и неумението им да извършват дори и прости математически преобразования, са сериозна пречка за разглеждане на редица интересни от физична гледна точка задачи. Доколкото обаче подобни задачи ефективно способстват за развиване на физична интуиция, желателно е на по-късните етапи на обучение да се намери възможност за разглеждането им поне с онези ученици, които проявяват по-голям интерес към физиката. По-долу е разгледана точно такава задача.

Въпрос. Как биха се държали корабите в моретата и океаните, ако Земята внезапно изгуби атмосферата си – ще потънат малко по-дълбоко, или малко ще изплуват?

Грешен отговор. Първото нещо, което идва на ум е, че в отсъствието на атмосфера корабите ще “газят” (както се изразяват професионалистите) във водата по-малко, защото вече няма атмосферен въздух, който ги притиска надолу, т.е. – малко ще изплуват.

“Да, ама не!” – както казваше един наш журналист по телевизията. Резултатът е обратен, но за да стане ясно защо, ще разгледаме пример, в който участват само течности. Ние, разбира се, знаем, че въздухът е флуид и се подчинява на всички закономерности, наблюдавани при флуидите, но огромната разлика между неговата и на водата плътност (1000 пъти!) като че ли пречи на осмисляне на някои факти и на свеждане до общо разбирането им на интуитивно равнище.

Задача. В широк, до половина пълен с вода съд, плава парче дъбова дъска. Чрез внимателно доливане на спирт върху парчето съдът се допълва така, че двете течности не се смесят. Какво ще бъде равнището на водата в така напълнения съд – по-ниско, или по-високо от началното?

Всъщност, това е старият въпрос за корабите, само че сега вместо за кораб става дума за парче дърво, вместо за въздух – за спирт. Ясно е, че ако доливането на спирт предизвика издигане на парчето дъска, равнището на водата ще спадне и обратно.

Качествено разглеждане. Плътността на дъбовата дъска ($\rho = 900 \text{ kg/m}^3$) е по-малка от плътността на водата ($\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$), но по-голяма от плътността на спирта ($\rho' = 800 \text{ kg/m}^3$), така че заради неравенствата $\rho' < \rho < \rho_0$ парчето плува във вода, но потъва в спирт.

Преди доливането на спирта, теглото на парчето е равно на теглото на изместената от него вода (Архимед!). След добавяне на спирта неговото равнище е над горната повърхност на дъската и упражнява върху нея определено хидростатично налягане. То обаче е по-малко от налягането на спирта върху водната повърхност, защото равнището на водата е **под** равнището на горната повърхност на дъската. Налягането на спирта върху водната повърхност се предава във всички посоки навътре във водата (Паскал!), така че върху долната повърхност на плаващото парче действа и изтласкваща сила, дължаща се на разликата от налягането на спирта върху водната повърхност и върху горната повърхност на парчето.

Тъй като теглото на парчето дърво се уравнисява от две изтласкващи сили (едната, дължаща се на изместената вода, другата – на изместения спирт), ясно е, че дължащата се на водата сила в случая е по-малка от действащата преди добавяне на спирта. Това означава, че при наличие на спирт обемът на подводната част на парчето е по-малък, то е изплувало малко над водата, което води до понижение на водното равнище.

По същата логика, ако атмосферата изчезне, корабите малко ще се издигнат над водното равнище, въпреки че вече нищо не ги “натиска отгоре”.

“Малко” – колко малко? Дали тук не става дума за ненаблюдаеми количества – ако се окаже, че разликата е микрометри, едва ли си е струвало да разсъждаваме по въпроса (оставяме настрана въпроса, че атмосферата няма как мигновено да изчезне). За да отговорим на въпроса “колко малко”, отново ще се върнем към плаващото парче дърво.

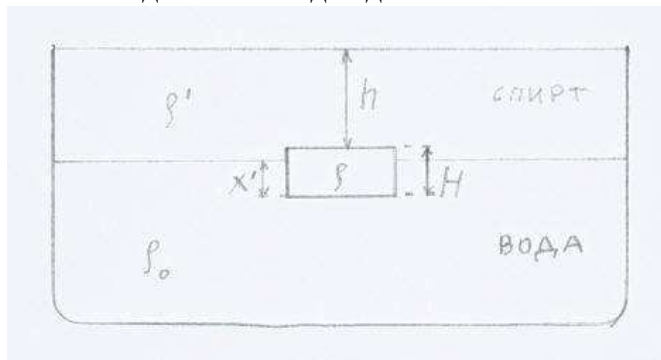
Количествено разглеждане. Да означим с H дебелината на парчето, а с x – дълбочината на потъването му при плаване само във вода. Ако S е площта на парчето, а g – земното ускорение, според закона на Архимед и въведените по-горе означения за плътностите в този случай е валидно равенството:

$$\rho g H S = \rho_0 g x S ,$$

т.е. дебелината x на потопената част от дъската се отнася към общата дебелина както плътността на дървото към плътността на водата:

$$(1) \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{x}{H} \quad \text{или} \quad x = \frac{\rho}{\rho_0} H .$$

Като вземем предвид посочените по-горе стойности на плътностите на дървото и водата, намираме, че 90 % от дъската е под водата.



Фиг. 1.

След доливане на спирта дълбочината на потъване на парчето във водата означаваме с x' , което подлежи на определяне. Да означим с h разстоянието между горната част на парчето дъска и равнището на спирта (фиг. 1). От фигурата се вижда, че разстоянието между равнището на спирта и водата е $h + (H - x')$. Тогава допълнителното налягане, което се предава по закона на Паскал върху долната страна на парчето е $\rho' g [h + (H - x')]$.

В този случай балансът на силите, действащи върху парчето е следният: две сили действат надолу – теглото му $\rho g H S$ и теглото на намиращия се над него слой спирт – $\rho' g h S$, и две изтласкващи сили, насочени нагоре – едната $\rho_0 g x' S$ се дължи на водата, а другата – $\rho' g [h + (H - x') S]$ – на спирта. От факта, че парчето дъска не потъва и не изплува, следва равенството:

$$\rho g H S + \rho' g h S = \rho_0 g x' S + \rho' g [h + (H - x')] S .$$

Оттук за новата дълбочина на потапяне на парчето във водата намираме:

$$(2) \quad x' = \frac{\rho - \rho'}{\rho_0 - \rho'} H .$$

От (1) и (2) за разликата в потапянето на дъската във водата получаваме:

$$(3) \quad x - x' = \frac{\rho'}{\rho_0} \cdot \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 - \rho'} H > 0 ,$$

т.е. дъската наистина малко изплува над водата, оставяйки изцяло потопена в спирта. Дали всъщност разликата $x - x'$ е малка проверяваме чрез формула (2) – като заместим стойностите на плътностите намираме, че дъската, 90 % от която бе потопена във водата, сега е потопена само наполовина ($x' = 0,5H$), което не може се смята “малко”.

А как стои въпросът с корабите – дали ще се издигнат забележимо, ако атмосферата изчезне? Отговорът зависи от **средната** плътност на конкретния кораб. Ако апроксимираме кораба с паралелепипед, неговата средна плътност може да се определи от формула (1), стига да знаем отношението между дълбочината на газенето и общата височина (т.е. x/H). Разбира се, това отношение зависи от типа на кораба, от това, дали и колко е натоварен и т.н. Ако за конкретност приемем, че общата височина е $H = 10$ m, а дълбочината на газене – 3 m, като отчетем, че плътността на въздуха е кръгло 1000 пъти по-малка от плътността на водата, от формула (3) получаваме, че изчезването на атмосферата ще причини потъване на кораба с около 7 mm. Не е много, но не е и незабележимо малко.

А не е ли възможно по-просто решение? Възможно е – достатъчен е и само законът на Архимед, според който изтласкващата сила е равна на теглото на изместената от тялото течност. Потопената във водата част от дървото има обем $x'S$ и следователно теглото на изместената вода е $\rho_0 g x'S$. По аналогичен начин обемът на горната част от дървото, която измества спирт, е $(H - x')S$, а теглото на изместения спирт – съответно $\rho'g(H - x')S$. Съгласно със закона на Архимед, сумата от тези две сили трябва да бъде равна на теглото на дървеното парче:

$$(4) \quad \rho_0 g x'S + \rho'g(H - x')S = \rho g HS.$$

Решението на това уравнение спрямо x' съвпада с това от формула (2).

Резултатът поставя въпроса защо поначало не използвахме този по-кратък път за решаване на задачата? Отговорът на въпроса е: защото изложено по този начин, решението съдържа непълнота, която може да се избегне, но може и да не се забележи и да се пропусне.

Работата е в това, че ние обясняваме възникването на изтласкваща сила с разликата между насочената нагоре сила, с която течността действа върху долната повърхност на потопеното тяло, и насочената надолу и по-малка сила, която действа върху горната му повърхност (когато тялото е изцяло потопено в течност). В нашия случай с двете течности спиртът няма досег до долната повърхност на парчето. Този факт поставя въпроса по какъв начин тогава спиртът оказва изтласкваща сила? Отговорът, разбира се, е: хидростатичното налягане на спирта върху разделителната повърхност между двете течности по закона на Паскал се предава във водата и, тъй като действа във всички посоки, оказва натиск **нагоре** върху долната повърхност на плаващото парче.

Последните разсъждения относно натиска на спирта са свързани с един често възникващ въпрос: действа ли изтласкваща сила на тяло, което е потопено в течност, а долната му повърхност плътно прилепва към дъното на съда и не дава възможност на течността да проникне под тялото. Отговорът е отрицателен: в този случай няма как да възникне изтласкваща сила. В разгледания по-горе случай такава сила действа благодарение на това, че течностите се подчиняват на закона на Паскал.