За плаващата свещ, обратната връзка, стабилността й и т.н.

(или – докъде може да се усложнява една проста задача)

По-долу е разгледана една "многоцелева" задача. Тя може да се използва за демонстриране възможностите на прехода от качествени към количествени разглеждания и обратно, дава представа за различните равнища на разглеждане, които зависят от това кои фактори в една реална ситуация се отчитат и кои – пренебрегват, както и да стане основа за едно практическо изследване, което да потвърди или опровергае теоретичните резултати (все още в училище намирането на свещ и цилиндър с вода не е проблем).

Задача. Запалена стеаринова свещ плава вертикално във вода, като над водата се намира 1 cm от свещта. За 10 min свещта се скъсява с 0,5 cm. Какво ще бъде положението след половин час:

А) свещта ще продължава да гори;

Б) водата ще е изгасила пламъка;

В) цялата свещ ще е изгоряла?

(Ако правите реален опит, за стабилизация забийте в долния край на свещта няколко кабърчета или подходящ пирон.)

Решение. Ако не се замисли, човек би посочил отговор б): за половин час (3 x 10 min) свещта би се скъсила с 1,5 cm, така че след 20-ата минута водата би трябвало да изгаси пламъка. Най-лесно обаче елиминираме като погрешен именно този отговор: според закона на Архимед отношението между дължината на потопената част към общата дължина на свещта е равно на отношението на плътностите на стеарина и водата. И тъй като това отношение не зависи от скоростта на горене или от общата дължина, над водата винаги ще се намира част от свещта и горенето ще продължава.

Следователно като вероятен отговор се очертава А). Не е ясно обаче дали за половин час няма да изгори цялата свещ, т.е. дали верният отговор не е В)? За да отговорим на този въпрос, трябва да знаем началната дължина на свещта. Тя може да се пресметне, ако знаем плътността на стеарина, която обаче е неизвестна.

Оттук нататък може да процедираме различно:

– В подходящ справочник виждаме, че плътността на стеарина е около 0,85 g/cm^3. Тъй като плътността на водата е 1 g/cm^3, законът на Архимед гарантира, че онзи 1 cm, който в началото е над водата, представлява само 15 % от дължината на свещта. Следователно подводната част е значително по-дълга от 1 cm и за половин час свещта няма да изгори. Така елиминираме и отговор В).

– Ако нямаме справочник, можем да претеглим една свещ, да измерим обема й и да пресметнем нейната плътност, свеждайки случая до предишния.

– Най-просто е да потопим една свещ във вертикален цилиндър с вода (за да не се налага да прикрепваме тежести в долния й край) и да се убедим, че дължината на надводната част е забележимо по-малка от дължината на подводната, което води до заключението, направено в първия случай.

И така, верният отговор е наистина А).

Допълнителна задача. При каква плътност на материала, от който е свещта, (и при зададените в условието числа) верен би бил отговор в)? (Вж. решението на стр. ...)

Решение на допълнителната задача. При скорост на скъсяване 0,5 cm за 10 min, за да изгори за 30 min или по-малко, дължината на свещта не бива да е по-голяма от 1,5 cm. Тъй като над водата е 1 cm, следва, че дължината на потопената част не трябва да надминава 0,5 cm. По закона на Архимед тази дължина (0,5 cm) се отнася към общата дължина (1,5 cm), както плътността ρ на свещта се отнася към плътността ρ_0 = 1 g/cm^3 на водата. Тогава търсената плътност не трябва да бъде повече от $\rho = \dfrac{0{,}5}{1{,}5}.1 = 0{,}33$ g/cm^3.

Не забравяйте обаче, че за да плава стабилно във вертикално положение такава свещ (по-голямата част от която е над водата!), е необходимо в долния й край да е прикрепена тежест. А това означава, че когато свещта стане достатъчно къса, тя ще потъне, преди да изгори и верен ще окаже отговор Б) – тогава водата ще изгаси пламъка. За да изгори цялата свещ, трябва в момента, в който дължината стане толкова малка, че плаването във вертикално положение става стабилно, да махнем тежестта. (Ако до тогава свещта не е потънала! – Възможен ли е такъв "сценарий"?).

А какво общо има всичко това с обратната връзка?

За да разберем отговора на този въпрос трябва да разгледаме по-подробно горенето на свещта. Всеки от собствен опит знае, че в горния край на свещта, около фитила, се образува вдлъбнатина с разтопен стеарин, така че горният ръб на свещта е по-високо от началото на фитила. Представете си сега какво става при горенето: скъсяват се и подводната, и надводната част на свещта. Настъпва момент, в който горният ръб на свещта приближава повърхността на водата, стеаринът там се охлажда и престава да се топи. Горенето обаче продължава, но за сметка на задълбочаване на вдлъбнатината около фитила. Това означава, че масата на свещта намалява, но обемът на потопения цилиндър не се променя – Архимедовата сила става по-голяма от теглото на свещта и тя трябва да започне да се издига. С това обаче горният ръб се отдалечава от водата, охлаждането отслабва и топенето се възстановява. И така нататък... .

Виждаме, че в случая наистина се осъществява обратна връзка: като реакция на прекратеното топене започва процес (издигането на свещта), който възстановява началното положение. При това връзката е отрицателна – ако бе положителна, тя би ускорила увеличаването на вдлъбнатината около фитила, докато не получим една "куха" свещ.

Всичко това освен "академично" значение, е имало и своята практическа стойност. Преди няколко века свещите служили като основен източник на светлина в оптичните изследвания. И когато било необходимо източникът дълго време да не променя положението си, т.е. да се елиминира влиянието на скъсяването на свещта, е използван именно стабилизиращият ефект, който се наблюдава при плаваща свещ.

Да превърнем качествената задача в количествена

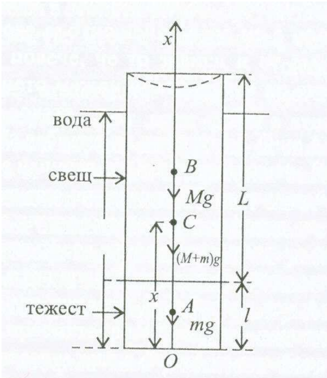
Нека първо си отговорим на въпроса защо е необходимо да стабилизираме плаването на свещта с пирон или кабърчета. Ако в долния край на свещта няма тежест, нейният център на масите е в средата й, а приложната точка на Архимедовата сила – в центъра на *потопената част*, т.е. под центъра на масите. Тогава всяко малко отклонение на свещта от вертикалата поражда двойка сили, които се стремят да я отдалечат от това положение – плаването във вертикално положение не е стабилно. Прикрепвайки допълнително кабърчета или пирон в долния край на свещта ние сваляме общия център на масите под приложната точка на Архимедовата сила и вертикалното положение става стабилно.

В разсъжденията дотук пренебрегнахме наличието на допълнителна тежест. Заради нея обаче намаляването на масата на свещта при горенето не е право пропорционално на скъсяването й. На практика това означава, че средната плътност на свещта в процеса на горене расте и не е изключено в един момент да стане равна на плътността на водата – зависи от масата и от обема на допълнителната тежест, която също измества вода. (След този момент свещта трябва да потъне.) За да можем да разсъждаваме в посока отчитане влиянието на тежестта, ще решим следната количествена задача.

Задача. Цилиндрична свещ с маса M и плътност ρ плава във вода. Каква минимална маса m трябва да има тежест с плътност ρ' ($\rho' > \rho$), така че след прикрепването й в долния край на свещта, тя да плава стабилно във вертикално положение. За опростяване приемаме, че тежестта е цилиндрична със същото напречно сечение като свещта, и пренебрегваме наличието на вдлъбнатина около пламъка.

Решение. Нека първо с едно разсъждение на качествено равнище покажем, че отговорът не зависи от напречното сечение S на цилиндрите. Наистина, представете си, че във водата плават във вертикално положение две еднакви свещи. Тъй като в системата не действат хоризонтални сили, ако ги долепим една до друга, те ще плават както и преди. Но двете долепени свещи можем да разглеждаме като една с два пъти поголямо сечение – следователно отговорът наистина няма да зависи от S.

Вертикалното положение на плаващата свещ ще бъде стабилно, ако центърът на масите на системата свещ–тежест е под точката, в която е приложена изтласкващата сила – тогава всяко отклонение от вертикалата поражда въртящ момент, който връща свещта в началното й положение.



Фиг. 1.

За да намерим положението на центъра на масите на системата свещ–тежест (т. C на фиг.1), използваме координатна система с ос Ox, насочена по оста на свещта и начало в т. O, разположена в долния край на тежестта (фиг. 1). Да означим с x разстоянието от т. O до т. C. Нека с L означим дължината на свещта, а с l – височината на цилиндричната тежест. Тогава центърът на масите на свещта (т. B) отстои на разстояние ($L/2$ + l) от т. O, а центърът на масите на тежестта (т. A) – на разстояние $l/2$ от същата точка. Абсцисата x на т. C намираме от условието за равновесие на двустранен лост AB с дължина $(L + l)/2$ и опорна точка – т. C, в двата края на който са приложени сили съответно mg и Mg:

$$mg(x-\frac{l}{2})=Mg(l+\frac{L}{2}-x)\,.$$

Оттук за разстоянието от т. O до т. C намираме:

$$x=\frac{m\dfrac{l}{2}+M(l+\dfrac{L}{2})}{(M+m)}\,.$$

Удобно е да изразим дължините чрез зададените маси. С помощта на формулите за маса на цилиндър ($M = \rho LS$ и $m = \rho' lS$) изключване L и l, и за x окончателно получаваме:

(1) $$x=\frac{M^2\dfrac{1}{2\rho}+m^2\dfrac{1}{2\rho'}+mM\dfrac{1}{\rho'}}{(M+m)}.\frac{1}{S}\,.$$

Нека намерим дължината L_0 на цилиндъра, образуван от допълнителната тежест и подводната част на свещта. Според закона на Архимед, теглото на системата свещ–тежест е $(M + m)g$ и е равно на теглото на изместената вода:

$$(M+m)g=SL_0\rho_0\,,$$

където ρ_0 е плътността на водата. Оттук намираме:

(2) $$L_0 = \frac{M+m}{S\rho_0}.$$

Архимедовата сила е приложена в средата на този цилиндър, т.е. на разстояние $x_0 = L_0/2$ от началото на координатната система. Така с помощта на (2) намираме:

(3) $$x_0 = \frac{M+m}{2S\rho_0}.$$

От условието центърът на масите да съвпада с приложната точка на изтласкващата сила ($x = x_0$) и с помощта на формулите (1) и (3) за неизвестната минимална маса m получаваме квадратно уравнение, в което, според очакванията, S не участва:

$$m^2 + 2mM + \frac{\rho-\rho_0}{\rho'-\rho_0}.\frac{\rho'}{\rho}M^2 = 0.$$

Неговото единствено положително решение е:

(4) $$m = \left[\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}.\frac{\rho'-\rho}{\rho'-\rho_0}} - 1\right]M.$$

(Забележете, че неравенствата $\rho < \rho_0 < \rho'$, изразяващи, че плътността на свещта е по-малка от плътността на водата, а тя – по-малка от плътността на тежестта, гарантират, че подкоренната величина е по-голяма от единица, и, че $m > 0$.)

И така, за стабилното плаване във вертикално положение в долния край на свещта трябва да прикрепим тежест с маса, по-голяма от пресметнатата по формула (4). Така например, ако тежестта е желязна ($\rho' = 7{,}8$ g/cm^3), масата й трябва да е по-малко от 10 % от масата на свещта. Като отчетем, че плътността на желязото е кръгло 10 пъти по-голяма от плътността на стеарина, това означава, че височината не железния цилиндър, прикрепен към свещта, трябва да бъде около 1 % от дължината на свещта. (На практика това означава, че за да стабилизираме свещ с дължина около 10 cm, би трябвало да е достатъчно да прикрепим в основата й монета с диаметър, равен или по-голям от диаметъра на свещта. Проверете този извод опитно!)

Проверка. За любителите на преобразования на неравенства предлагаме да проверят, че ако към свещ с маса M прикрепим тежест с пресметнатата от (4) маса m, свещта няма да потъне (т.е. да проверете дали е изпълнено неравенството $L_0 < L + l$).

Теми за размисъл. 1. Равенство (4) гарантира $x = x_0$. Сигурно ли е обаче, че ако масата на тежестта е по-голяма от определената по формула (4), ще бъде изпълнено условието за стабилност $x < x_0$? Наистина, увеличаването на тежестта сваля центъра на масите надолу, но дали приложната точка на Архимедовата сила няма да слезе още по-ниско?

2. При изгаряне на каква част от началната дължина на свещта средната плътност на системата свещ–тежест ще се изравни с плътността на водата, след което свещта ще потъне? Зависи ли отговорът на този въпрос от площта на напречното сечение на свещта?

И отново на качествено равнище! За разлика от математичните задачи, повечето задачи по физика се отличават с особеността, че може да се решават с различна степен на задълбочаване. Тази особеност се дължи на факта, че при решаването им винаги използваме някакъв идеализиран модел, пренебрегващ определени фактори, които в някои случаи може да се окажат решаващи.

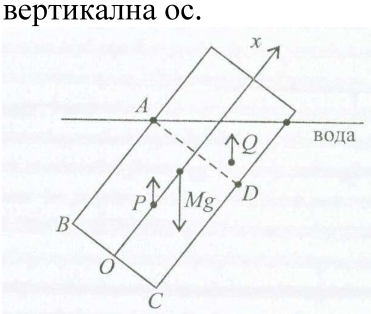
За да разберем какви фактори сме пренебрегнали при решаване на количествената задача, ще разсъждаваме по следния начин. Преди всичко, в направените по-горе разсъждения има едно твърдение, което звучи подозрително просто:

"Ако в долния край на свещта няма тежест, нейният център на масите е в средата й, а приложната точка на Архимедовата сила – в центъра на потопената част, т.е. под центъра на масите. Тогава всяко малко отклонение на свещта от вертикалата поражда двойка сили, които се стремят да я отдалечат от това положение – плаването във вертикално положение не е стабилно."

По този повод може да се поставят два въпроса. Първият: какво става, след като свещта се отдалечи от вертикалното положение? Интуитивно ясно е, че тя ще се преобърне и ще започне да плава в положение, при което оста й е **хоризонтална**. При това (отново интуитивно ясно) новото й положение е стабилно! Но нали и в този случай приложната точка на Архимедовата сила е **под** центъра на тежестта?! Защо отпечатаното с наклонен шрифт разсъждение в този случай не е валидно?

Втори въпрос: представете си, че свещта е много къса, т.е. – разглеждаме плаване на достатъчно плосък (къс) цилиндър. Отново интуицията подсказва, че в случая точно това е стабилното положение и не е необходимо да използваме никаква тежест, за да предотвратим преобръщане. Защо? И какво означава *достатъчно* плосък (или къс), къде е границата между къс и дълъг цилиндър?

Така поставени, тези въпроси сочат, че решението на задачата зависи от съотношението между размерите на свещта, между нейния радиус и нейната височина, а найвероятно и от съотношението между плътностите на свещта и водата. Решението, което представихме по-горе, е валидно при условие, че радиусът на свещта е много по-малък от дължината й! За да изясним как влияе крайната стойност на напречния размер, може да използваме фиг. 2, на която е изобразена "дебела" свещ в наклонено положение. Вижда се, че потопената част вече не е цилиндър с две успоредни основи. За по-ясно да си представим, че тази потопена част е съставена от обикновен цилиндър (с успоредни основи) – цилиндъра *ABCD*, и от частта, чието сечение е триъгълникът *ADE*. Приложната т. *P* на Архимедовата сила, действаща на първата част, отново е върху оста на цилиндъра, но приложната т. *Q* на Архимедова сила, която действа на втората част, е очевидно извън оста. При това, тя действа така, че се стреми да възстанови вертикалното положение на свещта и когато е достатъчно голяма (т.е. при достатъчно плосък цилиндър), свещта плава стабилно с вертикална ос.



Фиг. 2.

Направените разсъждения показват, че трябва да има някакво съотношение между радиуса и дължината на свещта, при което става смяна между стабилно плаване с хоризонтална ос и стабилно плаване с вертикална ос. Пресмятането на това съотношение вече не е просто, още повече, че то зависи и от съотношението между плътностите на свещта и на водата.

Из дебрите на историята. Още Архимед е написал два тома, озаглавени *Върху плаването на телата*. В първия той доказва, че хомогенно тяло с форма на сегмент от сфера винаги плава така, че основата е успоредна на водната повърхност (над или под нея). Във втория том Архимед пресмята равновесните положения на плаващи тела с форма на параболоиди в зависимост от съотношенията между плътностите на тялото и на течността. По-горе, поради дългите пресмятания, ние не привеждаме решението на проблема за цилиндрична свещ. А представяте ли си каква работа трябва да е извършил Архимед, който не е разполагал с математическите средства, които използваме ние и които са развити приблизително 2000 години след него!?! И представяте ли си също така какви пресмятания трябва да извърши един корабостроител, за да осигури достатъчно стабилно плаване на проектирания кораб, чиято форма е несравнимо по-сложна от тази на една цилиндрична свещ?!

Задача–закачка. Във вода плава цилиндричен съд с обем 9 l и маса 1 kg. Ще плава, или ще потъне съдът, ако в него поставим желязно гюлле, каквото мъжете използват в лекоатлетически състезания?

Масата на гюллетата, използвани в леката атлетика, е малко над 7 kg. Това означава, че общата маса на съда и гюллето е по-малка от 9 kg, а силата на тежестта, която им действа – под $9g$ (g – земното ускорение). Максималната Архимедова сила, действаща когато съдът е потопен до горния си ръб, е $9g$ (защото плътността на водата е 1 kg/l). Очевидният отговор е, че съдът ще плава, макар и потопен почти до горния си ръб.

Къде е закачката, обаче? Отговор – в това, че не е указана височината на цилиндъра – цилиндър с обем 9 l може да бъде дълъг, но може да бъде и къс. За да разберем ролята на тази неопределеност, отново ще прибегнем към метода на екстремните стойности.

Представете си екстремния случай на много плосък цилиндър (например като домакинска тава). За да плава "тавата", трябва да поставите гюллето точно в средата ѝ, а при най-малкото отклонение то ще се търкулне към околната стена, оста на цилиндъра ще се наклони, "тавата" ще загребе вода и двете тела ще потънат. В другия екстремен случай диаметърът на цилиндъра е само малко по-голям от диаметъра на гюллето (диаметърът на желязно гюлле с маса около 7 kg е приблизително 15 cm). Височината на цилиндър с обем 9 l и диаметър 15 cm е около половин метър. С гюлле на дъното си, такъв цилиндър би плавал във вода стабилно във вертикално положение, макар и потопен почти до горния си ръб – в случая центърът на масите е далече под приложната точка на Архимедовата сила.

Следователно отговорът на закачката е – зависи от радиуса на съда, може да плава, може и да потъне.

И така, какъв е отговорът на въпроса в подзаглавието: докъде може да се усложнява една проста задача? Най-вероятно – неограничено! Обърнете внимание, например, колко въпроси оставихме без отговор за една наистина проста задача за плаваща свещ. Ако обаче запитаме докъде *следва* да усложняваме една проста задача, нещата се променят, защото отговорът зависи и от този, който решава задачата (от неговата подготовка, способност за задълбочаване и т.н.), от това, кое на практика има значение и най-важно – какви цели си поставяме с решаването.

Допълнение. В сборника на М.Е.Тулчински *Качественные задачи по физике* (М., Просвещение, 1972) е поместена следната задача:

364. защо греда с цилиндрична форма и плътност 600 kg/m^3 никога не може да плава вертикална, а само легнала?

В отговора се казва, че при такава плътност приложната точка на изтласкващата сила ще бъде **под** приложната точка на силата на тежестта и затова всяко отклонение от вертикалното положение поражда двойка сили, които завъртат гредата до хоризонталното ѝ положение.

Към задачата ѝ могат да се направят две бележки.

Първо. От разсъжденията, свързани с плаването на свещта е ясно, че обяснението на автора е вярно не само при плътност 600 kg/m^3, но и при всяка друга плътност, при която гредата плава, т.е. споменаването на величината 600 kg/m^3 е излишно, с което се нарушава едно от изискванията към условията за коректност на задачите – в тях да няма излишни данни.

Второ. Авторът неявно подразбира, че дължината на гредата е достатъчно голяма в сравнение с напречните размери на сечението й – в противен случай той няма отговор на въпроса: *защо положението на хоризонтално плаващата греда е стабилно*?