

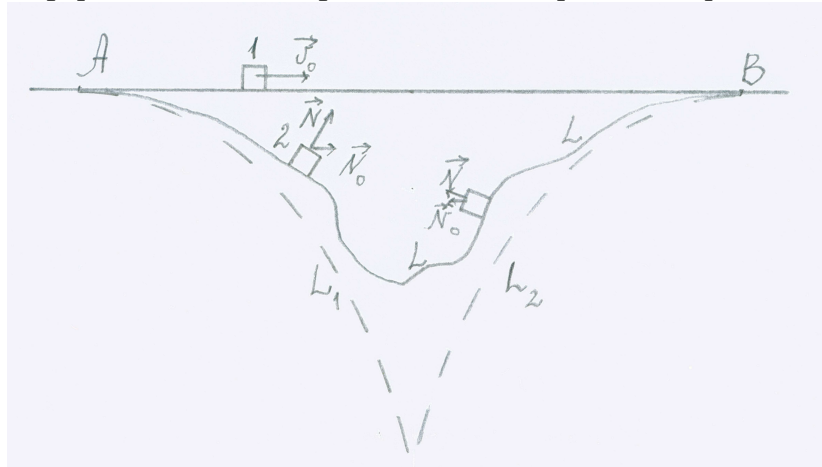
Отново – кой пристига пръв?

Парадоксът на пистовото колоездене. Известен¹ е следният парадоксален факт: ако един колоездач по хоризонтален път може да измине за час 60 km, за същото време по пистата на колодрума изминава до 70 km. Проблемът е да се обясни този парадокс.

С хоризонталния път нещата са ясни – може да се приеме, че по него скоростта на колоездача е постоянна. За да разберем с какво се различава движението по пистата, трябва да си представим нейната форма. Силно опростявайки ситуацията, можем да я разглеждаме като съставена от два успоредни хоризонтални участъка, съединени в двата си края с по един сектор, ограничен от две полуокръжности. Вътрешната полуокръжност е хоризонтална, а средата на външната е издигната с няколко метра така, че се образува *вираж*. Навлизайки в завоя, колоездачът се издига към външния ръб на виража и наклонява велосипеда към вътрешността на завоя на ъгъл, при който хоризонталната съставляваща на гравитационната сила създава достатъчно голямо центростремително ускорение. При това положение велосипедът остава приблизително перпендикулярен на пистата и затова – стабилен. Ако вираж липсва, накланяйки велосипеда, колоездачът рискува да падне, в случай че сцеплението между гумите и настилната не е достатъчно голямо. Така основната роля на виража е да осигури безопасност в завоя.

Оказва се обаче, че наличието на вираж има отношение и към изясняване на парадокса, за който стана дума в началото. За да разберем ролята му, трябва да решим следната задача.

Задача. Две тела започват да се хлъзгат без триене и с една и съща начална скорост v_0 по релси от т. A до т. B . Релсите лежат във вертикална равнина, като траекторията на тяло 1 е хоризонтална отсечка, а траекторията L на тяло 2 се намира изцяло под отсечката и има форма, показана на фиг. 1. Кое тяло пристига първо в т. B ?



Фиг. 1.

Предварителен коментар. Формата на кривата L изглежда произволна, но тя трябва да отговаря на няколко условия, които гарантират, че хлъзгайки се по нея, тялото 2 не напуска релсата. Така например, тя трябва да бъде достатъчно гладка (т.е. навсякъде радиусът на кривината ѝ трябва да е значително по-голям от размерите на тялото); нито в низходящата, нито във възходящата ѝ част не трябва да има много стръмни участъци, от които тялото може да излети или в които да “заседне” и т.н. Лесно може да се съобрази например, че низходящата част на траекторията трябва да се намира изцяло над параболата L_1 , по която би се движило тяло, хвърлено от т. A надясно с хоризонтална начална скорост v_0 . В противен случай тялото ще напусне L , тъй като вертикалната съставляваща на скоростта му няма да бъде достатъчно голяма. Подобно ограничение може да се формулира и за възходящата част на L : тя трябва да лежи изцяло над

¹ Вж. напр. **Stork D.G., Ju-xing Yang** *The unrestrained brachistochrone*, Am. J. Phys., **54**, 1986, 992–997.

параболата L_2 , по която би се движило тяло, хвърлено от т. B на ляво с хоризонтална начална скорост v_0 . И тъй като допирателните към L_1 и L_2 съответно в т. A и в т. B са хоризонтални, в тези точки хоризонтални са и допирателните към L . (Ако например допирателната към L в т. B сключва ненулев ъгъл с отсечката AB , достигайки края на пътя си тялото 2 би излетяло над т. B , т.е. би напуснало релсата си.)

Именно възможността да напусне релсата или да “заседне” в евентуална нейна чупка отличава тази задача от задачите за движения на маниста по спици (вж. напр. файловете 54 manista.pdf и 55 manista.pdf) – при манистата траекторията е фиксирана и манистото не може да я напусне. Както ще се убедим, този факт се оказва съществен и затова резултатът от решението на задачата сега е съвсем различен от резултатите за манистата.

Решение 1. За да отговорим на поставения в условието въпрос е достатъчно да разгледаме *хоризонталната* съставяща на скоростите на двете тела. За тяло 1 тя е постоянна и то изминава пътя си с постоянна скорост. В низходящата част от траекторията на тялото 2 действа нормална реакция на опората \vec{N} , чиято хоризонтална съставяща \vec{N}_0 е по-посока на движението (вж. фиг. 1) и следователно **увеличава** хоризонталната компонента на скоростта. Следователно по низходящия участък от L хоризонталната скорост на тялото 2 е по-голяма от скоростта на тялото 1.

По възходящия участък от L хоризонталната съставяща на реакцията на опората \vec{N} е насочена в обратна посока и затова в този участък хоризонталната съставяща на скоростта на тялото 2 намалява. Въпреки това, по целия този участък тя остава по-голяма от v_0 , защото законът за запазване на енергията гарантира, че скоростта на тялото 2 става v_0 едва, когато то се издигне до т. B .

И така, щом и по низходящата, и по възходящата част от L хоризонталната съставяща на скоростта на тялото 2 е по-голяма от v_0 , то тялото 2 пристига първо в т. B . А това означава, че хоризонталната средна скорост на тялото 2 е по-голяма от хоризонталната средна скорост на тялото 1, което на пръв поглед (но само на пръв поглед!) е в противоречие с консервативността на гравитационната сила.

Именно с това заключение в цитираната по-горе работа се обяснява парадоксът на пистовите колоездачи – те използват виражите за увеличаване на средната си скорост.

Решение 2. Отговор на задачата може да се получи и с *метода на екстремните стойности*. За целта разглеждаме граничния случай на безкрайно малка начална скорост v_0 . В този случай на тялото 1 е необходимо безкрайно дълго време, за да достигне т. B . Тялото 2 обаче, хлъзгайки се надолу по L , придобива някаква скорост, чиято хоризонтална съставяща е крайна и затова изминава пътя си за крайно време, т.е. пристига в т. B преди тялото 1.

Забележете, че за разлика от задачата за манистата, тук не можем да разглеждаме другия граничен случай – случая на много голяма начална скорост, защото в него тялото 2 със сигурност в някоя точка ще напусне релсата си.

И отново за пистовите колоездачи. Представете си, че кривата L лежи не **под**, а **над** отсечката AB . С разсъждения, напълно аналогични на проведените, може да докажем, че в този случай положението е обратно на разгледаното по-горе: първо в т. B ще пристигне тялото 1. Това като че ли поставя под въпрос обяснението на парадокса на пистовите колоездачи. Наистина, колоездачите винаги стартират от средата на хоризонталния участък на пистата, след което в завоя се издигат и спускат по виража към другия хоризонтален участък. При това положение би трябвало да заключим, че средната скорост за половин обиколка е *по-малка*, отколкото ако няма вираж, т.е. точно обратното на това, което се наблюдава. Очевидно ситуацията е по-сложна и едно обяс-

нение би могло да се състои в това, че поне при първото си изкачване по виража колоездачът увеличава силата, с която върти педалите, за да предотврати намаляването на скоростта си.