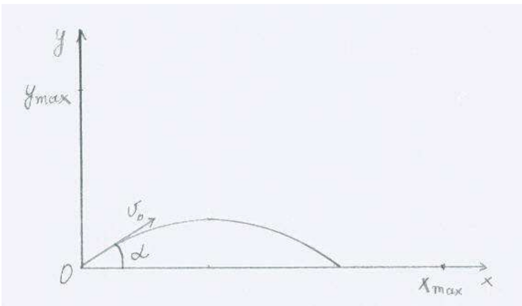
Безопасна зона – едно елегантно решение

Съществуват задачи, свързани със сравнително несложни физични ситуации, чието решаване в училище е невъзможно заради необходимостта да се използва апаратът на висшата математика. Някои от тях (например измежду задачите за намиране на максимум или минимум) допускат и елементарни решения, но неудобството е, че не само не може да се посочи алгоритъм за решаването им, но няма и критерий, който да показва дали една задача допуска, или не допуска подобно решение.

Представяме пример за задача, която не е за търсене на екстремум, а от по-друг тип – нейното решение изисква намиране на обвивката на семейство криви линии. Алгоритъмът от диференциалната геометрия за решаване на подобни задачи гласи: уравнението на обвивката на семейство криви с уравнения $F(x, y, \alpha) = 0$ се намира, като от това равенство и от равенството $\dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$ се елиминира параметърът α[1]. Очевидно процедурата е неприложима в училище. Както ще се убедим обаче, приведеният пример също допуска заобикаляне на висшата математика, и то по един елегантен и достъпен дори за осмокласниците начин.

Да разгледаме намиращо се върху хоризонтална равнина зенитно оръдие: то изстрелва снаряди с определена начална скорост v_0, чиято посока има произволен азимут и сключва с хоризонта произволен ъгъл α от интервала [0, 90°]. От гледна точка на възможността да бъдат поразени, точките над равнината са два вида. Едните, които са достатъчно близко до оръдието, могат да бъдат достигнати от снарядите, а другите са по-далечни точки, през които не минава траекторията на нито един снаряд. Съвкупността на далечните точки образува т.нар. *безопасна зона*, защото там самолети и вертолети могат да летят, без да бъдат поразени от зенитния огън. Задачата е да се намери повърхността, която разделя двете области – опасната и безопасната зона, като, както обикновено в училище, съпротивлението на въздуха се пренебрегва.

Без да се правят количествени разглеждания, от съображения за симетрия относно вертикалата, минаваща през оръдието, е ясно, че търсената повърхност притежава ротационна симетрия спрямо тази права. Ето защо е достатъчно да ограничим разглежданията в една вертикална равнина. Началото на координатната система поставяме в мястото на оръдието, оста *Ox* лежи хоризонтално в равнината, а *Oy* е насочена вертикално нагоре (фиг.1).



Фиг. 1.

От изучаването на движение на тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта, е известно, че изстрелян вертикално нагоре снаряд достига максимална височина $y_{\max} = \dfrac{v_0^2}{2g}$, а далечната на полета на снаряда е максимална при α = 45° и се описва с израза $x_{\max} = \dfrac{v_0^2}{g}$ (g – земното ускорение). Ясно е, че точките от пространството, за които или

[1] Вж. напр. **Фихтенгольц Г. М.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. I, гл. 7, $ 3.

$y > y_{max}$ (при произволно x), или $x > x_{max}$ (при произволно y), принадлежат на безопасната зона. Въпросът е обаче да намерим уравнението на повърхността, която огражда отдолу тази област (отгоре тя очевидно е неограничена).

При направения избор на координатната система законът за движение на тяло в хомогенно гравитационно поле има вида:

(1, а) $$x = v_0 t \cos\alpha$$

(1, б) $$y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Чрез елиминиране на времето от тези две равенства получаваме уравнението на траекторията на снаряда:

(2) $$y = x \mathrm{tg}\alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 .$$

От гледна точка на математиката (2) представлява уравнение на еднопараметрично семейство параболи, всяка от които съответства на някаква конкретна стойност на параметъра α. На плоския чертеж търсената граница между опасната и безопасната зона се представя от кривата, която представлява обвивка на това семейство и за намиране на уравнението й би трябвало да приложим алгоритъма, споменат в началото.

За да решим проблема, без да използваме висша математика, ще поставим задачата по следния начин: под какъв ъгъл α трябва да изстреляме снаряд с начална скорост v_0, така че траекторията му да мине през точка с координати (x, y)? Намирането на отговора изисква да решим уравнението на траекторията (2) спрямо ъгъл α. Решаването на тригонометрични уравнения не е от приятните задачи, но в това отношение нашият случай е благоприятен. За целта използваме тъждеството:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\alpha$$

и заместваме дясната му страна в (2). Така за неизвестната величина $\mathrm{tg}\,\alpha$ получаваме следното квадратно уравнение:

(3) $$(\mathrm{tg}\alpha)^2 - 2\frac{v_0^2}{gx}(\mathrm{tg}\alpha) + \left(1 + \frac{2v_0^2 y}{gx^2}\right) = 0 .$$

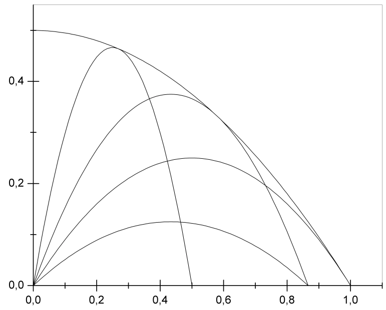
Когато стойностите на x и y са такива, че това уравнение има два различни реални корена, тогава точката с координати (x, y) се намира в опасната зона – през тази точка преминават две траектории на снаряди, изстреляни под два различни начални ъгъла. Когато уравнението няма реални корени, точката с координати (x, y) се намира в безопасната зона. Ние се интересуваме от случая, когато точката (x, y) е на границата между двете области. В този случай през нея преминава само една траектория на снаряд, т.е. двете решения на квадратното уравнения съвпадат. Условието за такова съвпадение е дискриминантата на (3) да бъде нула, т.е. да бъде изпълнено равенството:

(4) $$\left(\frac{v_0^2}{gx}\right)^2 - \left(1 + \frac{2v_0^2 y}{gx^2}\right) = 0 .$$

Уравнението на търсената обвивка получаваме, като решим (4) спрямо y:

(5) $$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + \frac{v_0^2}{2g} .$$

Това също е уравнение на обърната надолу парабола, чиито връх е в точката с координати $(0, \frac{v_0^2}{2g}) = (0, y_{max})$, и която минава през максимално отдалечената от оръдието точка, до която може да достигне снаряд – точката с координати ($\frac{v_0^2}{g}$, 0) = (x_{max}, 0) (фиг. 2). На фигурата за случая $\frac{v_0^2}{g} = 1$ са изчертани графиките на траекториите на четири снаряда, изстреляни под ъгли съответно 30°, 45°, 60° и 75°. Вижда се, че последните три се допират до клонката от параболата (5), която лежи в първия квадрант на равнината (xOy), докато снарядът, изстрелян под ъгъл 30°, въобще не достига до нея. Лесно се съобразява, че всички снаряди, изстреляни под ъгъл $\alpha < 45°$, не достигат до параболата–обвивка, като тя се допира само до траекториите на снарядите, изстреляни по ъгъл $\alpha \geq 45°$.



фиг. 2.

Търсената повърхност, която разделя опасната от безопасната зона, се получава чрез завъртане на параболата (5) на 360° около вертикалната ос на симетрия (оста Oy).