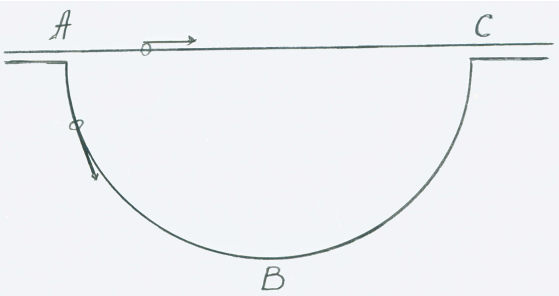
Пример за преход от качествено към количествено разглеждане чрез методите на екстремните стойности и на размерностите

В [1)] бе разгледана следната *качествена* задача:

Задача: По нишките *AC* и *ABC* се движат еднопосочно без триене две маниста (фиг. 1). В т. *A* манистата пристигат едновременно с еднакви скорости. Покажете, че съществува такава стойност на скоростта в т. *A*, при която манистата пристигат в т. *C* едновременно.



Фиг. 1.

Решението използва *метода на екстремните стойности,* според който следва да се анализира поведението на системата при определени екстремни стойности на някои от параметрите. В случая такъв параметър е началната скорост v на топчетата в т. *A*.

Решение: Да разгледаме ситуацията при една екстремна стойност на скоростта – $v \to 0$. В този случай на манистото, което се движи по отсечката *AC* (по-долу го наричаме *горно*), ще е необходимо **безкрайно** време, за да достигне т. *C*. *Долното* манисто (движещото се по дъгата *ABC*) обаче ще се ускори по дъгата *AB*, ще придобие някаква крайна скорост и, след като премине т. *B*, забавяйки движението си, ще достигне т. *C* за някакъв **краен** интервал време. Лесно се съобразява, че този интервал представлява полупериод на математично махало с амплитуда 90°. (Известно е, че връзката между периода на математичното махало, неговата дължина (в случая – R) и земното ускорение g при произволна амплитуда не се изразява с елементарни функции. Според точното решение на задачата този полупериод при амплитуда 90° е $3{,}71\sqrt{\frac{R}{g}}$, т.е. значително по-голям от $3{,}14\sqrt{\frac{R}{g}}$ – стойност, валидна при малки амплитуди.)

Тези разсъждения показват, че за достатъчно малки скорости в т. *C* долното манисто изпреварва горното.

Другият екстремен случай е при големи начални скорости, т.е.при $v \to \infty$. Заради действието на гравитационната сила, и сега във всеки момент скоростта на долното манисто по дъгата *ABC* е по-голяма от скоростта на горното, но в сравнение с началната скорост това увеличение ще бъде пренебрежимо малко. Това означава, че в случая $v \to \infty$ може да смятаме скоростите на двете маниста практически с еднакви. И тъй като пътят на горното (отсечката *AC*) е по-къс, то ще пристигне в т. *C* преди долното манисто, т.е. резултатът е противоположен на получения в първия случай.

Няма физични основания, въз основа на които да смятаме, че с нарастване на v времената на движение ще имат някакви минимуми или максимуми. Оттук следва, че съществува някаква крайна стойност v_0 на началната скорост, при която манистата пристигат в т. *C* едновременно. (Тук неявно използваме едно твърдение, което в математиката се нарича принцип на непрекъснатост.)

Така чрез метода на екстремните стойности доказваме **съществуването** на решение на задачата. Както в много случаи на доказателства за съществуване обаче, решението не указва как да се търси неизвестната величина (в случая – v_0), а още по-малко – каква е нейната стойност.

Нека опитаме да направим преход от качествени към количествени разглеждания, т.е. да потърсим при каква начална скорост v_0 топчетата пристигат едновременно в т. *C*. За точното решение на задачата трябва да напишем законите за тяхното движение, да приравним времената на пристигането им в т. *C* и да решим полученото уравнение за v_0. Тъй като законът за движение по дъгата не се изразява чрез елементарни функции, то и намирането на точното решение излиза извън границите на нашите разглеждания.

Ето защо си поставяме по-скромната задача само да стесним интервала от стойности за v_0. За решаването ѝ помага методът на размерностите. Според него отговорът на много физични задачи може да бъде предсказан по порядък (т.е. с точност до множител, който не е много различен от единица) само от съображения, свързани с размерностите на величините, участващи в условието на задачата.

Първият въпрос, който трябва да си зададем в случая, е от какво може да зависи v_0. Той е свързан само с движението на долното манисто, защото движението на горното е равномерно. Ускоряването и забавянето на долното манисто се дължат на силата на тежестта, което сочи, че отговорът сигурно ще зависи от земното ускорение g. Единствен друг параметър, от който може да зависи v_0, е радиусът R на дъгата *ABC*.

Вторият въпрос е: съществува ли комбинация от величините g и R с размерност на скорост? (Ако такава комбинация няма, значи не сме отчели някакъв съществен параметър). Тъй като размерността на ускорението е m/s^2, а на радиуса – m, единствената комбинация с размерност на скорост е:

$$\left[\sqrt{Rg}\right]=\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Според метода на размерностите v_0 с голяма вероятност не е примерно 1000 пъти по-голяма от $\sqrt{Rg}$, или 100 пъти по малка от $\sqrt{Rg}$.

От закономерностите при свободно падане знаем, че не $\sqrt{Rg}$, а $\sqrt{2Rg}$ има ясен физичен смисъл – това е скоростта, придобита от тяло при свободно падане от височина R. Затова по-нататък ще търсим сравнение на v_0 не с $\sqrt{Rg}$, а с величината:

(1) $$u=\sqrt{2gR}\,.$$

Нека предположим, че в т. *A* манистата имат скорост u. Първа оценка, която можем да направим, е за максималната скорост v на долното манисто – скоростта му в т. *B*. Тъй като там потенциалната енергия на манистото е намаляла с mgR, законът за запазване на механичната енергия осигурява равенството:

$$\frac{mu^2}{2}=\frac{mv^2}{2}-mgR\,,$$

от което следва:

$$v=\sqrt{u^2+2gR}=\sqrt{u^2+u^2}=u\sqrt{2}\,.$$

Ако предположим, че по цялата дъга *ABC* манистото се движи с тази максимална скорост, то би изминало пътя си (чиято дължина е πR) за време $\frac{\pi R}{u\sqrt{2}}$. Тъй като с изключение на т. *B* скоростта на манистото е по-малка от $u\sqrt{2}$, времето *t*” за изминаване на дъгата *ABC* ще удовлетворява неравенството:

(2) $$t''>\frac{\pi R}{u\sqrt{2}}\,.$$

В същото време горното манисто изминава своя път (дълъг 2R) за време $t'=\dfrac{2R}{u}$.

Като определим оттук $\dfrac{R}{u}$ и го заместим в (2), получаваме:

(3) $$t''>\frac{\pi}{2\sqrt{2}}t'.$$

Понеже $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}>1$, от (3) следва, че $t'' > t'$, т.е. при скорост $u=\sqrt{2gR}$ долното манисто пристига в т. C след горното. Но нали при много малки скорости съотношението беше обратното – долното манисто изпреварва горното! Единственото заключение, което можем да направим в случая за търсената скорост е, че:

(4) $$0 < v_0 < \sqrt{2gR}.$$

Така съчетаването на двата метода – на метода на екстремните стойности и на метода на размерностите, даде възможност за намиране една нетривиална оценка за интервала, в който лежи стойността на неизвестната величина.

По-взискателният читател би могъл да отбележи, че неравенство (4) изключва случая $v_0 \sim 1000\sqrt{2gR}$, но не изключва например $v_0 \sim 0{,}01\sqrt{2gR}$. Точните пресмятания показват, че $v_0 \approx 0{,}87\sqrt{2gR}$ и следователно методът на размерностите и в този случай дава решение с точност до множител от порядъка на 1 (0,87 ~ 1).

Предизвикателство. Оставяме на читателя да помисли дали долната граница за v_0 в (4) не би могла да се подобри, без да се излиза извън границите на елементарната математика.

Примери за обобщение. Представете си, че правата AC от фиг. 1 е наклонена надолу и сключва ъгъл α с хоризонта, като взаимното й разположение с дъгата ABC остава непроменено. Опитайте с помощта на метода на екстремните стойности да докажете съществуването на такава стойност на α, при която двете маниста, пуснати едновременно и без начални скорости от т. A, пристигат едновременно в т. C.

Ако се справите с този въпрос, пробвайте се върху неговото обобщение: ако манистата тръгват с някакви ненулеви, но еднакви скорости, дали винаги може да се намери такъв ъгъл α, при който те пристигат в т. C едновременно?

И следващото обобщение: в кои случаи при **различни** начални скорости може да се намери ъгъл α, при който манистата пристигат в т. C едновременно?

Литература:

1. **Попов Хр.** *53 + 15 решени физични задачи*, С., Просвета, 2000, с. 196.