Маниста, нанизани на спици

Немалък брой кинематични задачи дават възможност за удачно свързване на знанията, получени по физика, с тези от геометрията. Такава бе например задачата за намиране на максималния ъгъл, под който един изстрелян снаряд по време на целия си полет се отдалечава от оръдието. Подобно качество притежава и разгледания по-долу случай.

Представете си сноп от голям брой тънки спици, като единият край на всяка от тях е закрепен в неподвижна точка. Другите краища на спиците са разпределени равномерно върху обърната надолу полусфера (така че спиците са като бодли на таралеж, обърнат с корема нагоре). Представете си също така, че на всяка спица е нанизано мънисто, което може да се хлъзга по нея без триене. Манистата се намират в горния край на съответната спица и се освобождават едновременно (спиците, разбира се, остават неподвижни). Каква повърхност би се получила, ако в даден момент мислено опънем тънка ципа върху манистата?

Очевидно е, че движението на всяко манисто става под действие на силата на тежестта, но за разлика от задачите за изстреляни снаряди, хвърлени топки и камъни и пр., в които видът на траекторията е известен (парабола), но не и конкретните ѝ параметри, тук траекторията на всяко манисто е известна – права линия (съответната спица). Това означава, че освен силата на тежестта, върху манистото действа и друга сила – в случая, реакцията от страна на спицата. От подобен вид са например задачите за хлъзгане или търкаляне по наклонена равнина.

Тъй като описаната ситуация притежава симетрия спрямо вертикалната права, минаваща през т. *A*, в която са закрепени краищата на спиците, достатъчно е да разгледаме двумерния случай – движението на манистото в равнината на чертежа по спица, която сключва с вертикалата някакъв ъгъл α (фиг. 1). Манистото, което пада по вертикалната спица се движи с ускорението на свободното падане *g*, и за време *t* е изминава път $d = \frac{1}{2}gt^2$. Движението на манистото по наклонената спица има по-малко ускорение – *g*cosα, така че за същото време изминава път $\frac{1}{2}gt^2\cos\alpha = d\cos\alpha$. Сравнението между двете величини показва, че хордата, която свързва двете маниста, е перпендикулярна на наклонената спица. И това заключение е валидно за движението на кое да е манисто, независимо от наклона на спицата, по която се хлъзга.

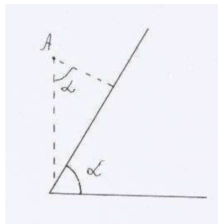
Фиг. 1.

От геометрията е известно, че геометричното място на точките в равнината, от които една отсечка (в случая – *d*) се вижда под прав ъгъл, е окръжност с диаметър, равен на отсечката. Следователно в момента *t* всички маниста са разположени върху окръжност с диаметър $d = \frac{1}{2}gt^2$. Ако завъртим тази окръжност около вертикална ос, за да получим триизмерната картина, намираме отговора на поставения въпрос: **във всеки момент манистата се намират по повърхността на сфера с нарастващ радиус**.

Полученият резултат може да се използва за решаване на следната задача.

Задача. Манисто, което може да се хлъзга без триене по тънка спица, се намира над наклонена равнина, сключваща ъгъл α с хоризонта. Под какъв ъгъл спрямо вертикалата трябва да насочим спицата, така че след като бъде освободено, манистото да достигне равнината за най-кратко време?

Анализ. Преди всичко лесно се съобразява, че решението на задачата трябва да се търси във вертикалната равнина, която е перпендикулярна на наклонената равнина и минава през началното положение на манистото, поради което отново използваме двумерен чертеж (фиг. 2). Лесно може да установим границите, в които лежи търсеният ъгъл φ. Ако спицата е перпендикулярна на наклонената равнина (т.е. – φ = α), пътят на манистото е най-кратък, но ускорението му е само $g\cos\alpha$ (фиг. 2). Ако спицата е вертикална (т.е. – φ = 0), манистото ще се движи с максимално ускорение (g), но пътят му ще е удължен. В останалите случаи времето за достигане на наклонената равнина расте:



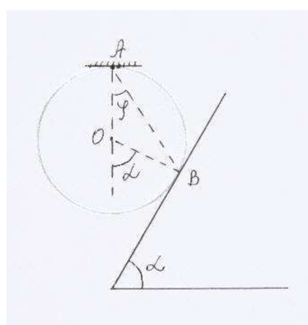
Фиг. 2.

– ако φ > α, ускорението е по-малко, а пътят – по-дълъг, отколкото в случая на спица, перпендикулярна на равнината;

– ако φ < 0, т.е. спицата сочи вляво от вертикалата – отново ускорението е по-малко, а пътят – по-дълъг, отколкото при вертикална спица.

Този анализ показва, че 0 < φ < α.

Решение. Решението намираме с помощта на направения по-горе извод: манистата, които тръгват едновременно от една и съща точка и се хлъзгат по спици, сключващи различни ъгли с вертикалата, във всеки момент лежат на повърхността на сфера, чиито радиус расте с времето.



Фиг. 3.

Да си представим, че в даден момент няколко мниста тръгват от т. *A* по спици, сключващи различни ъгли с вертикалата. На фиг. 3 е показан моментът, в който сферата, върху която те лежат, тангира в т. *B* наклонената равнина. Очевидно е, че ако манистото се спуска по спица, насочена от т. *A* към т. *B*, то ще достигне равнината за най-кратко време. А тъй като перпендикулярът *OB* към наклонената равнина минава през центъра на въпросната сфера (на чертежа – окръжност), то триъгълникът *AOB* е равнобедрен и тогава търсеният ъгъл φ е точно половината от външния ъгъл, сключен между вертикалата и *OB*, който е α.

И така, търсеният ъгъл е $\varphi = \dfrac{\alpha}{2}$.