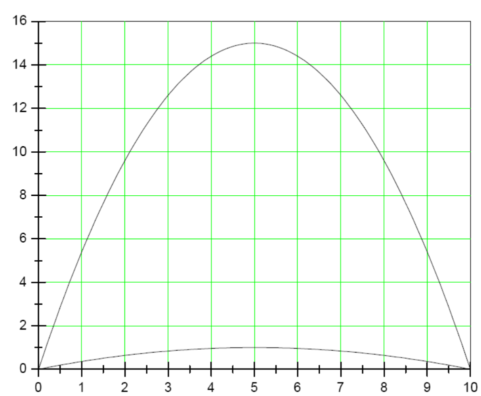
Още една задача за движение на снаряд

Задачите за движение на тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта, са твърде разнообразни и заемат немалка част от раздела кинематика в сборниците със задачи по физика. Интересно е, че въпреки популярността им, все още се срещнат и такива, които могат да изненадат читателя с елегантността на своето решение, при това получено без напускане рамките на гимназиалната математика.

В училище, в зависимост от възможностите, се изучават редица свойства на въпросните движения. Обикновено се извеждат формулите за максимална далечина на полета ($x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$), за максималната му височина ($y_{\max} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin^2\alpha$), за времето на полет ($t_{\max} = 2\frac{v_0}{g}\sin\alpha$), доказва се, че времето, през което тялото се издига, е равно на времето за спускането му и т.н. (Както обикновено, в тези формули v_0 е началната скорост, α – ъгълът между началната скорост и хоризонта, а g – земното ускорение.)

За да достигнем до задачата, ще започнем с въпроса "*Възможно ли е по време на полета си изстрелян от оръдие снаряд да се приближава, а не да се отдалечава от оръдието*?". За човек, който има представа за движенията на снарядите само от видяното във филмите, въпросът звучи глуповато, защото за такъв човек отговорът изглежда очевиден – не, не е възможно. Човек, обаче, който е склонен да разглежда различни ситуации, може да се усъмни в този отговор – най-малкото заради лекотата, с която представите ни водят до него. Ако освен това той е свикнал да разглежда и екстремни ситуации, несъмнено би стигнал до противоположния отговор – да, възможно е. Наистина, ако оръдието стреля вертикално нагоре, през цялата втора половина от полета си, т.е. – при падането си, снарядът ще се приближава до оръдието! Такъв човек с по-аналитичен ум би продължил разсъжденията и по-нататък: а ако оръдието стреля под ъгъл спрямо хоризонта не 90°, а примерно 89°? Снарядът ще падне някъде близо до оръдието и отново през втората половина на полета си ще се е приближавал към него. С по-нататъшното намаляване на началния ъгъл става невъзможно да се прецени с качествени съображения дали снарядът непрекъснато се отдалечава от оръдието, или има моменти, в които се приближава към него. Единственото, което можем със сигурност да твърдим въз основа на интуитивните си представи е, че през възходящата част от траекторията снарядът се отдалечава от оръдието. Какво е положението при полета по низходящата част обаче може да отговорим само на основата на количествени разглеждания.



Фиг. 1.

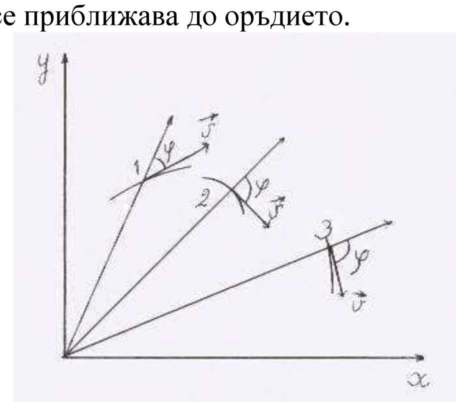
Като пример на фиг. 1 са представени две траектории на снаряд, изстрелян под различни ъгли спрямо хоризонта. При по-ниската траектория отдалечаването очевидно продължава и през втората половина на полета, до самия му край. Определете обаче с помощта на координатната мрежа ординатите на точките от по-стръмната парабола, чиито абсциси са например 7 и 8. След това пресметнете разстоянията от координатното начало да всяка от тези две точки – ще се убедите, че точката с абсциса 8 е по-близо до оръдието, отколкото точката с абсциса 7. Следователно поне при движението си между тези точки снарядът се е приближавал до оръдието.

Така стигаме до формулирането на следната задача.

Задача. Колко е максималният ъгъл спрямо хоризонта, при който изстрелян снаряд във всеки момент от полета се отдалечава от оръдието?

Анализ. В задачите за движение на тяло, хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта, като параметри участват началната скорост v_0, началният ъгъл α, сключен от нея с хоризонта и земното ускорение g. В настоящата задача се търси ъгъл – една безразмерна величина. От останалите два параметъра (v_0 и g) безразмерна величина не може да се образува. В такъв случай анализът на размерностите гарантира, че търсеният ъгъл няма да зависи нито от v_0, нито от g.

Преди да пристъпим към решаването на задачата трябва да изберем критерий, по който да съдим дали в даден момент снарядът се приближава или отдалечава от оръдието. За такъв можем да използваме ъгъла φ, заключен между моментната скорост на снаряда, която е допирателна към траекторията, и насочения лъч с начало в оръдието, който минава през снаряда (за краткост по-нататък ще го наричаме просто “ъгъла φ”). На фиг. 2 са представени три възможни случая на участъци от различни траектории. В случай 1 ъгълът φ е остър (φ < 90°) и снарядът очевидно се отдалечава от оръдието. В случай 2 ъгълът φ е прав (φ = 90°) и снарядът се движи по малка дъга от окръжност, т.е. в момента нито се отдалечава, нито се приближава до оръдието (тангентите към окръжността са перпендикулярни на съответните радиуси). Накрая, в случай 3, ъгълът φ е тъп (φ > 90°) и снарядът се приближава до оръдието.



Фиг. 2.

Решение. Законът за движение на снаряда се описва с формулите:

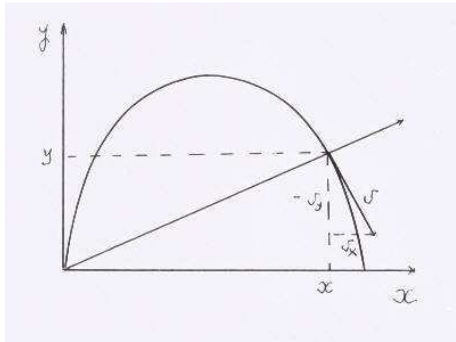
(1) $$x = v_0 t\cos\alpha \qquad \text{и} \qquad y = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2,$$

а законът за скоростта – съответно с формулите:

(2) $$v_x = v_0\cos\alpha \qquad \text{и} \qquad v_y = v_0\sin\alpha - gt.$$

Да допуснем, че върху траекторията има точка, в която φ = 90° (фиг. 3). От това, че двете хипотенузи и по един от катетите на двата правоъгълни триъгълника са перпендикулярни помежду си, следва подобие на триъгълниците, а оттам – и равенство на отношенията:

(3) $$\frac{y}{x} = \frac{v_x}{-v_y}.$$



Фиг. 3.

Като заместим в (3) x, y, v_x и v_y от (1) и (2), след преобразуване на израза получаваме следното квадратно уравнение за момента t, в който лъчът от оръдието към снаряда и скоростта са перпендикулярни:

(4) $$t^2 - \left(3\frac{v_0}{g}\sin\alpha\right)t + 2\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = 0\,.$$

Снарядът ще се отдалечава непрекъснато от оръдието, ако корените на уравнението са комплексни, което означава, че ъгълът φ в нито един момент не става 90°. Както знаем, корените на едно квадратно уравнение са комплексни, когато дискриминантата му е отрицателна, т.е. в нашия случай трябва да бъде изпълнено неравенството:

(5) $$\left(3\frac{v_0}{g}\sin\alpha\right)^2 < 4.2\left(\frac{v_0}{g}\right)^2.$$

Както и очаквахме въз основа на анализа на размерностите, параметрите v_0 и g се съкращават и получаваме, че синусът на търсения начален ъгъл трябва да удовлетворява неравенството:

(6) $$\sin\alpha < \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0{,}943\,.$$

Такъв синус има ъгълът 70°30’. Следователно, ако α < 70°30’, по време на целия полет снарядът се отдалечава от оръдието. Ако ъгълът е по-голям от тази стойност – в част от низходящия клон на траекторията той фактически се приближава към него.

Коментари

2. При качественото разглеждане на ситуацията би могло да направим още едно заключение: че в самия край на полета си снарядът със сигурност се отдалечава от оръдието (стига φ ≠ 90°!). Наистина, известно е, че крайната скорост сключва с хоризонта същия ъгъл, който сключва и началната, т.е. в края на полета φ < 90° и следователно снарядът наистина се отдалечава от оръдието.

3. Имайки на разположение уравнение (4), при условие, че α > 70°30’, бихме могли да определим продължителността на интервала време τ, през който снарядът приближава оръдието. Наистина, корените на уравнението са:

(7) $$t_{1,2} = \frac{3}{2}\left[\sin\alpha \pm \sqrt{\sin^2\alpha - \frac{8}{9}}\right]\frac{v_0}{g}\,.$$

В моментите t_2 и t_1 ъгълът φ = 90° (лъчът от оръдието към снаряда е перпендикулярен на скоростта), а търсеният интервал е:

(8) $$\tau = t_1 - t_2 = 3\sqrt{\sin^2\alpha - \frac{8}{9}}\,\frac{v_0}{g}\,.$$

Вижда се, че при $\alpha = 90°$, то $\tau = \frac{v_0}{g}$ – точно времето, през което пада един изстрелян вертикална нагоре снаряд.

3. Ако с $t_0 = \frac{v_0}{g}\sin\alpha$ означим времето, през което снарядът се издига, лесно се проверява, че при 70°30' < α < 90° са изпълнени неравенствата:

$$t_0 < t_2 < t_1 < 2t_0 .$$

($2t_0$ е времето за целия полет). От тях именно следва, че участъкът от траекторията, по който снарядът се приближава към оръдието, лежи изцяло върху низходящата й част. Това заключение по същество е само косвена проверка на верността на формулите, защото иначе от геометрични съображения то е очевидно.

4. Рядкост е начинът за решаване на една физична задача да бъде единствен. В нашия случай, използвайки геометрични съображения, получихме едно елегантно решение на задачата. А как би трябвало да постъпи човек, който не умее да ползва подобни съображения? Конвенционалният път изисква от равенства (1) да се пресметне разстоянието $\sqrt{x^2 + y^2}$ до оръдието, и да се търсят екстремуми на получената функция на времето по време на полета, т.е. за $0 < t < 2\frac{v_0}{g}\sin\alpha$. Опитайте и този начин на решение. Освен, че то излиза извън рамките на училищната математика, работата, която трябва да извършите не може да се определи другояче, освен като "хамалска". Тъкмо по тази причина нарекохме изложеното решение *елегантно*.

Погледнато по-общо – на какво се дължи преимуществото на "геометричното" решение? Отговорът не е труден – на удачния избор на ъгъла φ като параметър, по който съдим дали снарядът се отдалечава или приближава. При втория начин, който нарекохме "хамалски", като параметър се използва времето, което за тази задача се оказва неудачен избор.